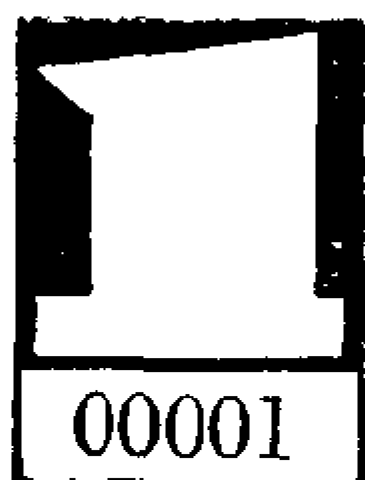
★目　录★



“逢十进一”十全十美吗？

人身上有一架天生的“计算机”——十个手指。古时代的人在数东西的时候，一边嘴里数一、二、三、……，一边扳着手指。当十个手指都扳到了，就在地上放一块小石头或者其他东西代表“十”。再一、二、三、……地数，满十了，再放一块小石头。……到积满了十块小石头时，再换成一个别的什么东西。这也许就是大多数民族都不约而同地使用“逢十进一”的十进制数的原因。

另外一些人爱用一只手的五个手指来数数（shǔ shù），他们就只能“逢五进一”了。而有些人不但爱用两只手，而且连两只脚也用来数东西，当然他们就是“逢二十进一”了。

请不要以为这是虚构的笑料，印第安人及中南美、非洲、西伯利亚北部有些民族，确实使用过五进制及二十进制。这是各民族的习惯不同而造成的。

英国曾使用过十二进制。例如1英尺等于12英寸，1磅等于12英两，12只叫1打，12打叫一箩，等等。

古代巴比仑人(居住在现今的伊拉克)曾经使用过六十进位制. 目前度量角的大小的度分秒制,就是巴比仑人留给我们的遗产.

我国旧制重量单位系统中,1斤等于16两,这就是一种不完全的十六进制.

小朋友可能会问,十进制数的产生是很自然的,五进制、二十进制的起源也可以解释,为什么有的民族会使用十二进制、十六进制、六十进制呢?

问题1 如果将角的度量单位规定为:1度=10分(十进制). 试计算半度,$\frac{1}{3}$度,$\frac{1}{4}$度,$\frac{1}{5}$度,$\frac{1}{6}$度分别是几分?

如果象现在那样:1度=60分(六十进制),试计算半度,$\frac{1}{3}$度,$\frac{1}{4}$度,$\frac{1}{5}$度,$\frac{1}{6}$度分别是几分?

在常常要计算一个单位的若干分之一的场合,你觉得六十进制方便些呢,还是十进制方便些?

问题2 如果1斤规定为16两,一斤的一半是多少两?一半的一半是几两?一半的一半的一半是几两?

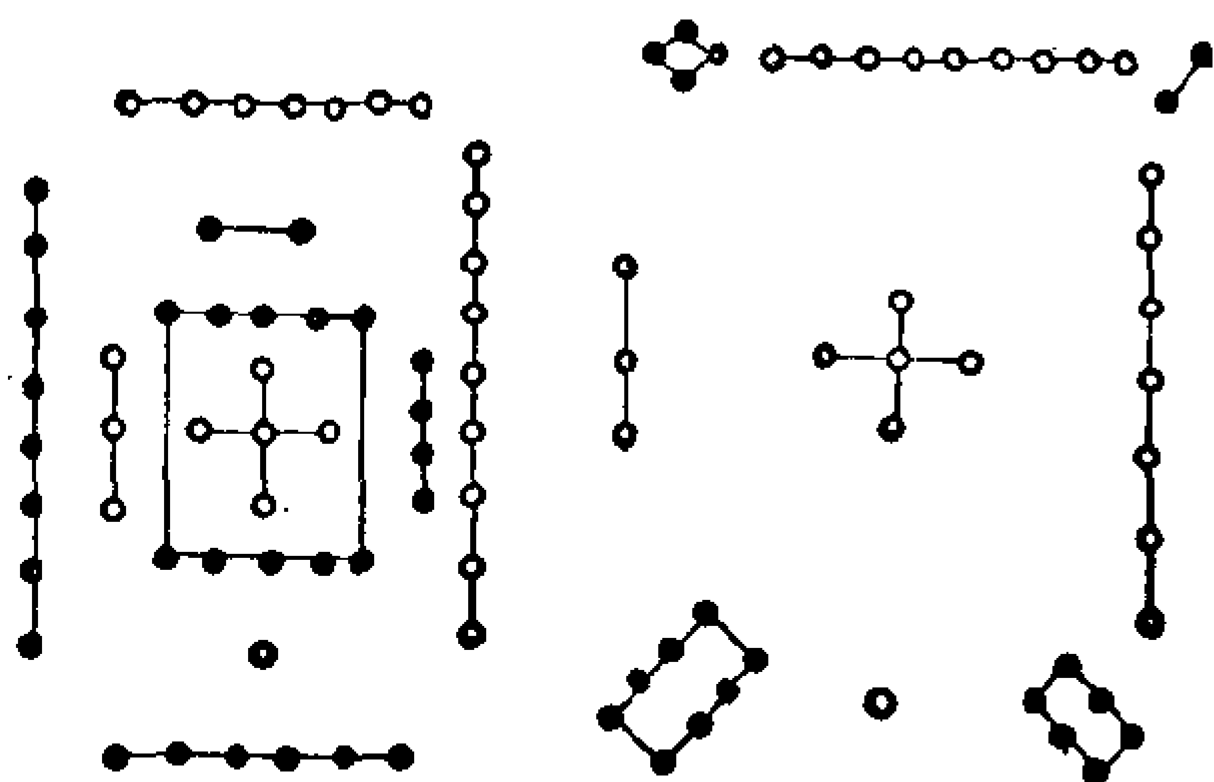
如果1斤规定为10两,再计算上面的问题.

在进行这类连续求"一半"的运算时,你觉得十六进制方便些,还是十进制方便些?*

---

* 从全局来看,1斤等于16两的旧重量制度是不方便的,因此,解放后,我国政府规定1斤等于10两.

数是怎么产生的？古代有不少神话传说，我国就有过河图、洛书的故事。传说伏羲氏时有一匹龙马，背了一幅“河图”在黄河里出现；又有一只神龟，背了“洛书”出现在洛水里。河图、洛书是什么呢？原来就是画了 1, 2, 3, 4, ……, 9, 10 个小圈、小点并按一定规定排成的图。相传，数就由此产生。当然这是不足为信的。



河图、洛书图

数的产生和一切科学的产生一样，是由于生产实践的需要。因为各民族的历史环境不同，所以使用的数就带有自己的特点，这是丝毫不奇怪的。由上面可以看出，十进制数也并不是十全十美的。在进行某些计算时，还是六十进制、十二进制与十六进制方便一些。一般人都认为十进制最好，其实这是因为我们对十进制数已使用习惯了的缘故。处于现代科学技术飞跃发展的今天，在特定的领域中，采用新的数制，已是很自然而必要的了。

问题解答

问题1 如果规定 $1^\circ=10'$，那末

$\frac{1^\circ}{2}=5'$，　$\frac{1^\circ}{3}=3.33\cdots\cdots'$，　$\frac{1^\circ}{4}=2.5'$，　$\frac{1^\circ}{5}=2'$，

$\frac{1^\circ}{6}=1.66\cdots\cdots'$.

由 $1^\circ=60'$，可得

$\frac{1^\circ}{2}=30'$，　$\frac{1^\circ}{3}=20'$，　$\frac{1^\circ}{4}=15'$，　$\frac{1^\circ}{5}=12'$，

$\frac{1^\circ}{6}=10'$.

在作上述运算时，显然是六十进制方便些.

问题2 如果规定 1 斤=16 两，那么

$$\text{半斤}=8\text{ 两}，\ \frac{1}{4}\text{ 斤}=4\text{ 两}，\ \frac{1}{8}\text{ 斤}=2\text{ 两}.$$

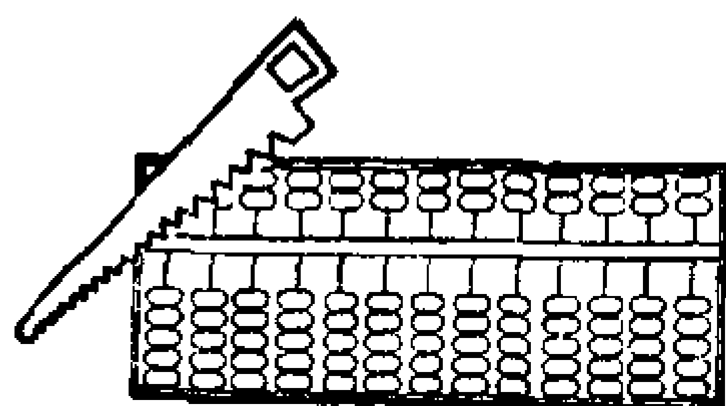
如果规定 1 斤=10 两，那么

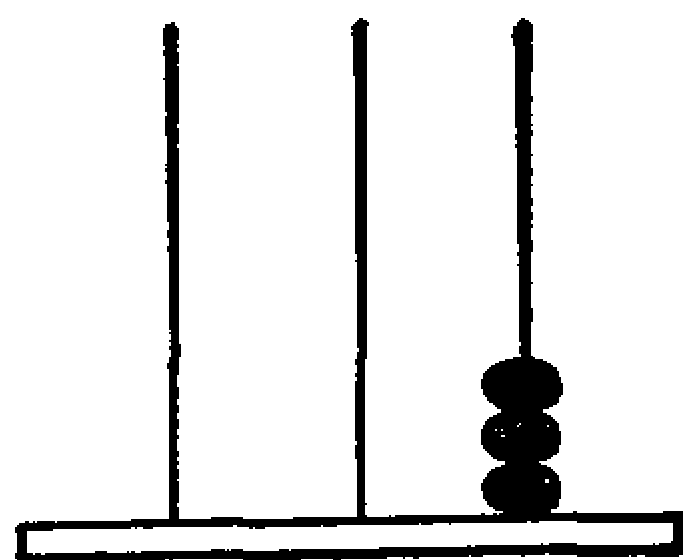
$$\text{半斤}=5\text{ 两}，\ \frac{1}{4}\text{ 斤}=2.5\text{ 两}，\ \frac{1}{8}\text{ 斤}=1.25\text{ 两}.$$

在作上述运算时，显然用十六进制来得方便.

用一只手数数

为了下面学习的需要，我们设想把算盘锯开，拿掉框架，成为如下图的计数器。并规定，计数器的柱子从右往左叫第一根，第二根，第三根，……。





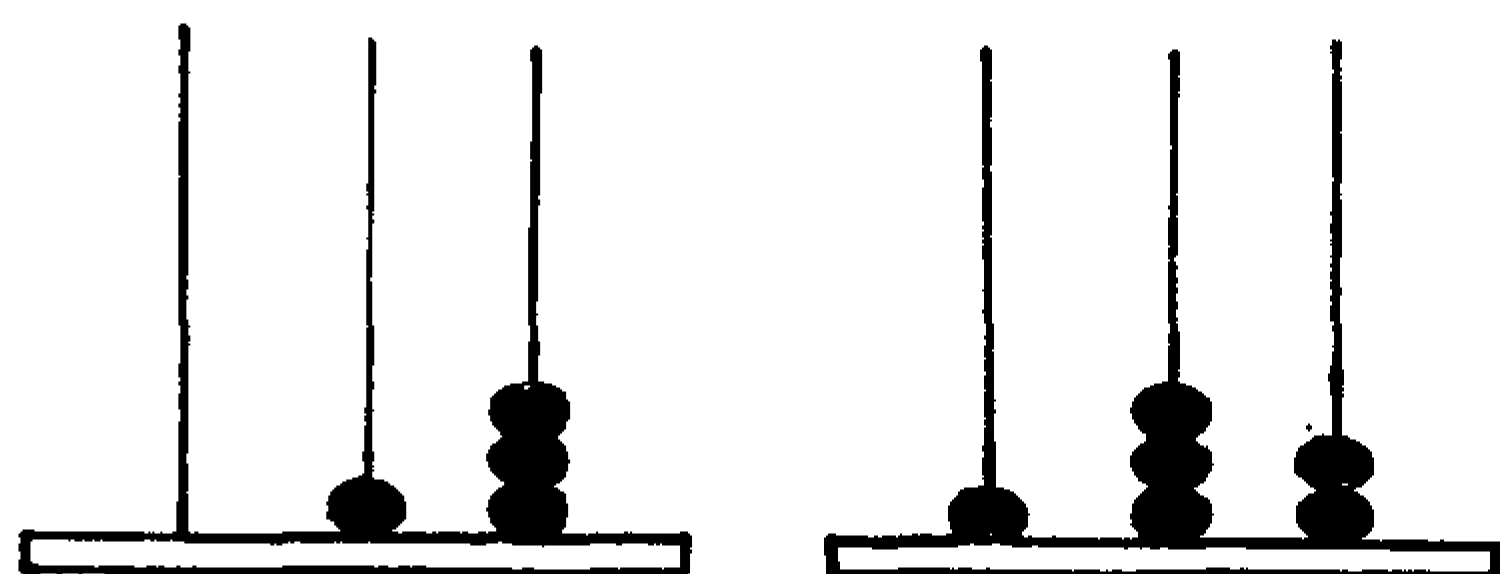
第三根 第二根 第一根

计数器

我们用在柱上套算盘珠的方法来代替扳手指计数。假设每根柱上最多只能够套十颗珠，计数时逢十要进一。我们把这个计数器叫做“十进计数器”。

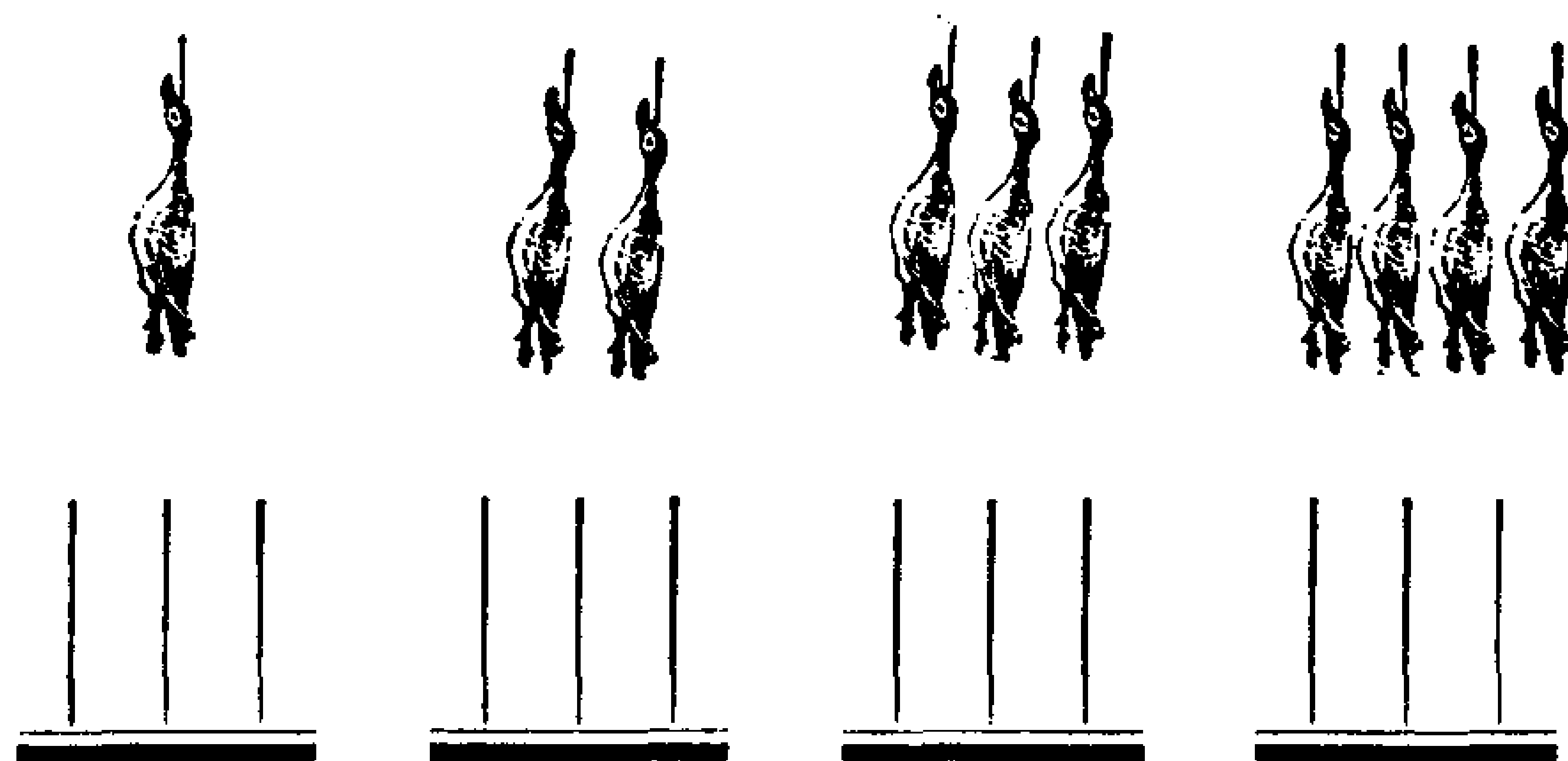
现在可以一面数数，一面往第一根柱子上套珠儿了。第一根柱子上积满十颗珠，把它们拿下来，并在第二根柱子上套一颗珠。然后，再继续数数，重新在第一根柱子上套珠儿。

问题 1 下列情况代表了哪些十进数：

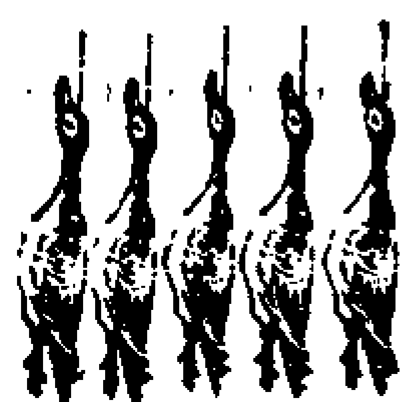
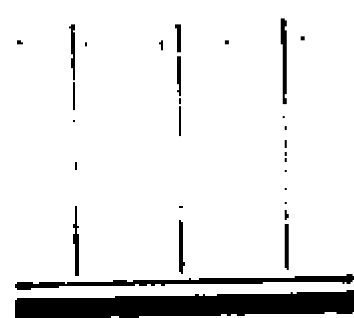


如果计数器的柱子短了一半，每根柱上最多只能套五颗珠，就是说计数时要"逢五进一"，我们就叫它五进计数器．这样一来，情况将发生变化了．用这架计数器计数，实质上与用一只手（五个手指）计数没有什么两样．

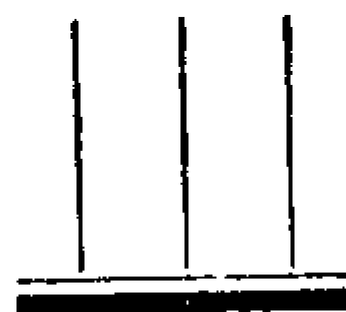
问题 2 如果爱用一只手计数的原始人分别猎到了图中这些野鸭，请你帮着在相应的珠图上画上表示野鸭数的珠儿．



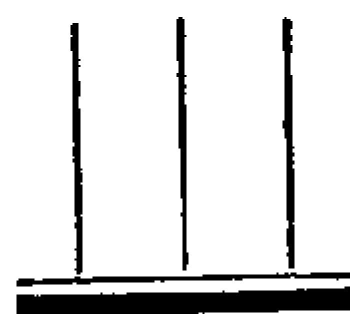
问题 3 如果猎到了如图的这些野鸭，该怎么套珠（注意，逢五要进一）？

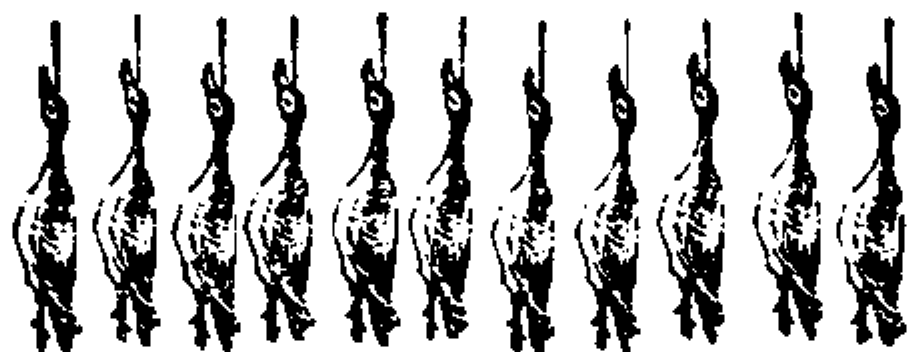
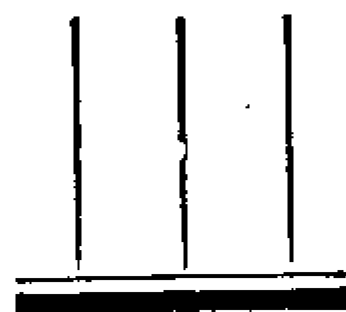
问题 4　野鸭数如下图，该怎么套珠？

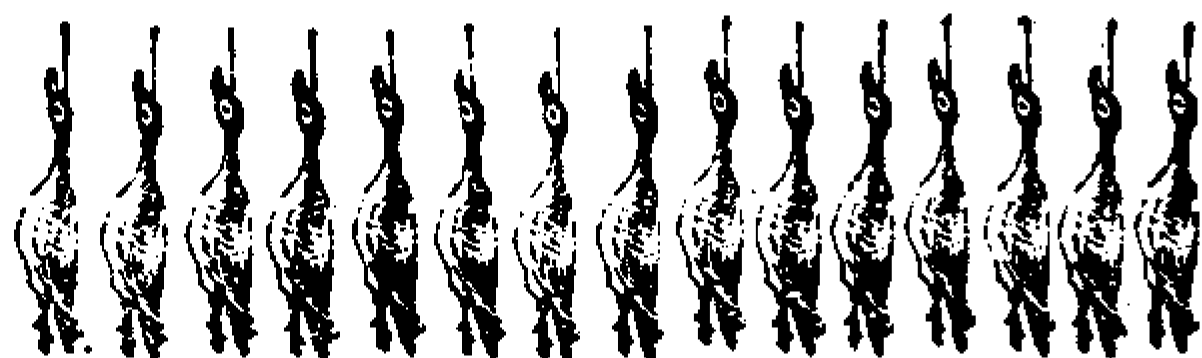
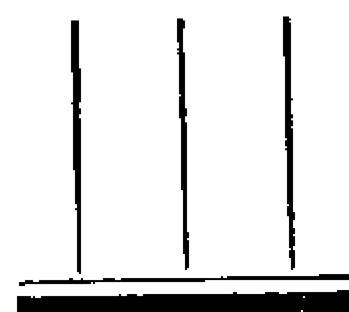


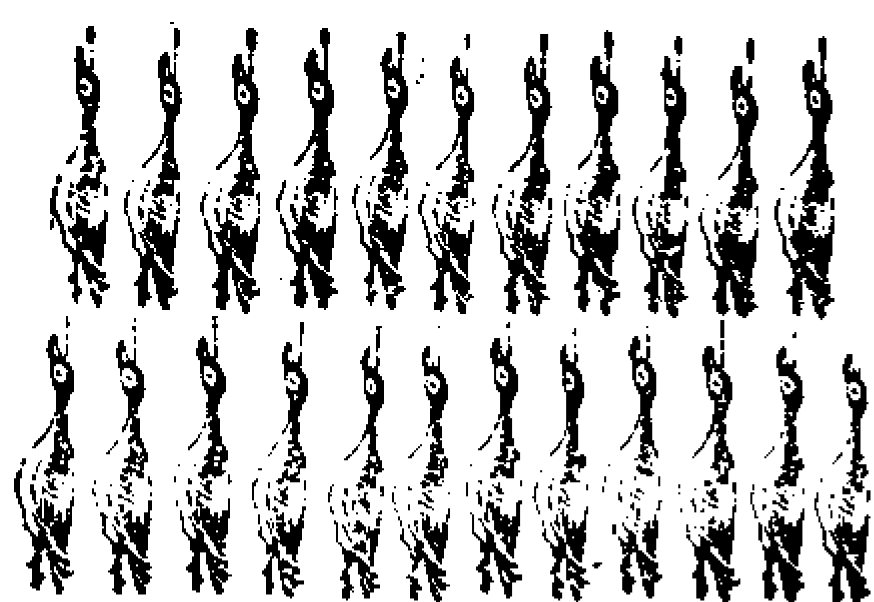
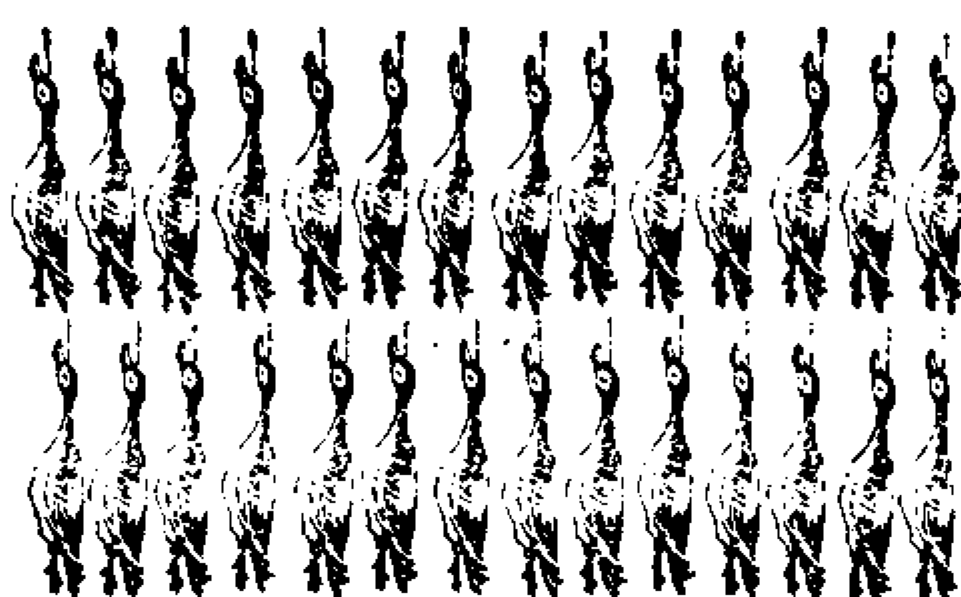
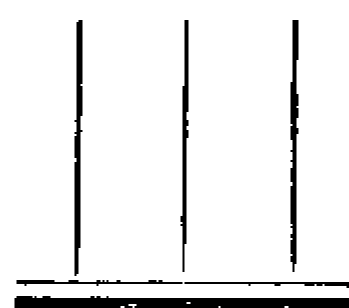
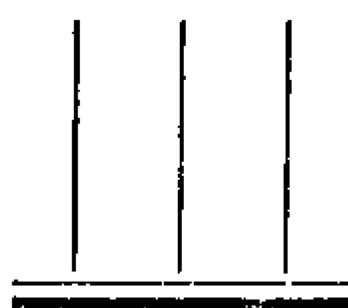
问题 5　野鸭数如下图，该怎么套珠？



问题 6　野鸭数如下图，该怎么套珠？

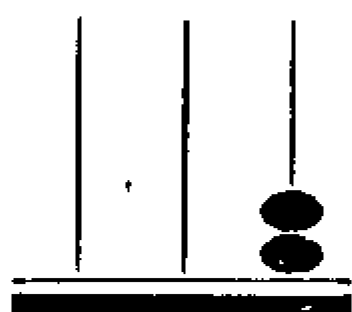



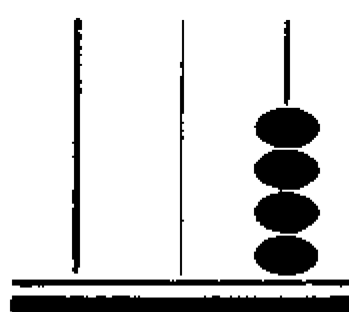





我们已经会用“逢五进一”的办法计数，并且还能把它“储存”在五进计数器上了。现在我们还要把它在纸上记录下来。

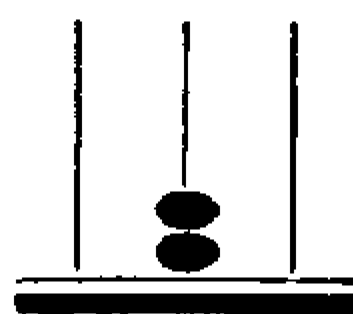
我们都会把十进计数器上的珠图记成一个数。仿照十进计数法，对于五进计数器的珠图，也可将它记为一个五进制数。为了与十进制数相区别，在数的右下角添上一个(五)。

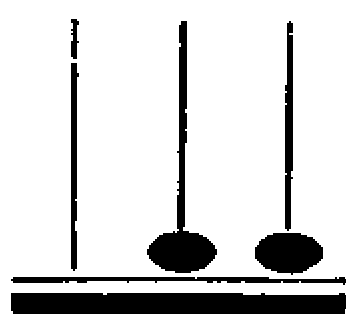
问题 7 将下列五进计数器珠图记为五进制数。

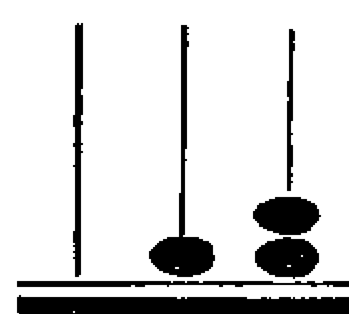

2(五)

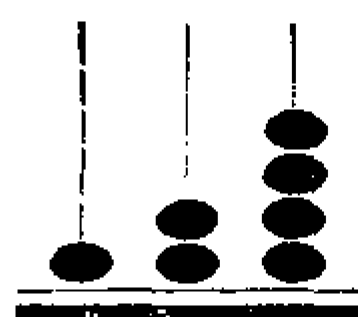
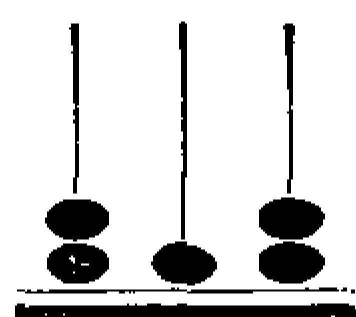
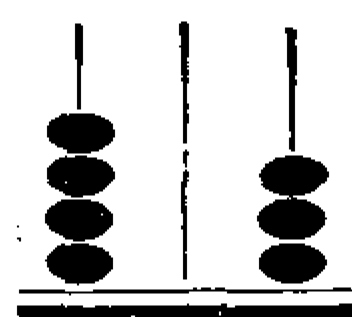


问题 8 将下列五进计数器珠图记为五进制数。


20(五)

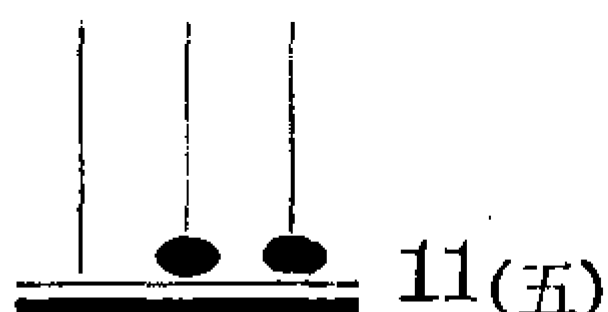

11(五)

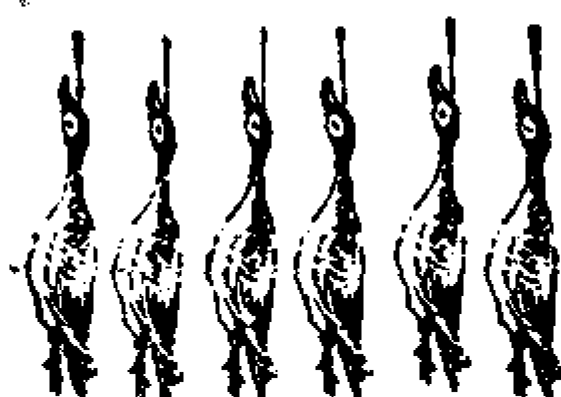


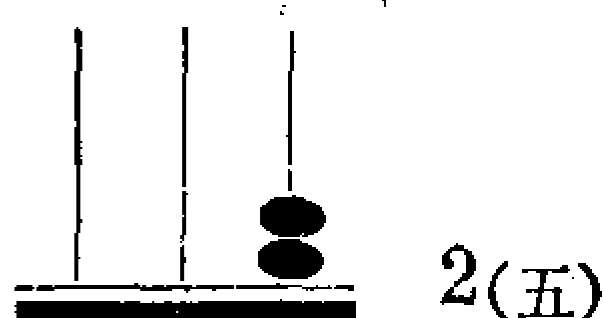
  

在你写出的这些数里，出现过数码 5，6，7，8，9 吗？

问题 9 下列五进计数器珠图分别代表了哪一堆野鸭？用箭头把它们连起来，并用十进制数说出每堆野鸭是几只？



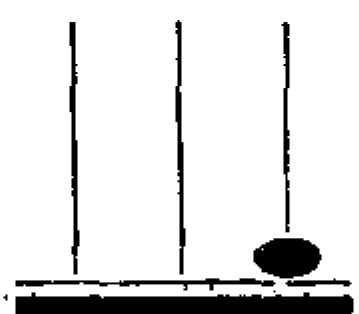
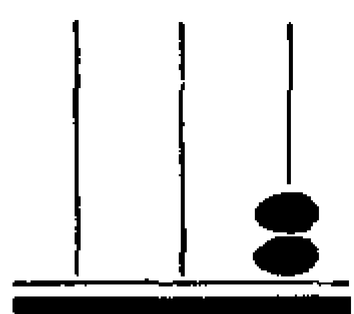
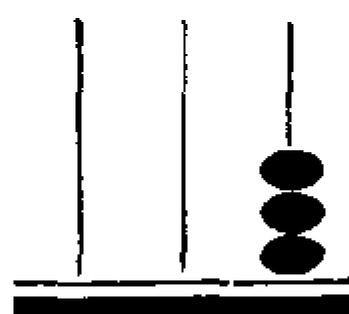
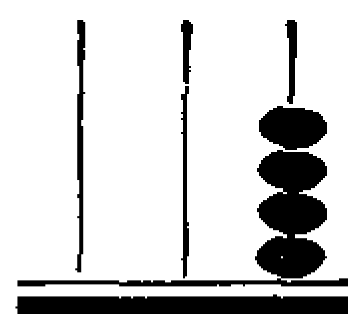




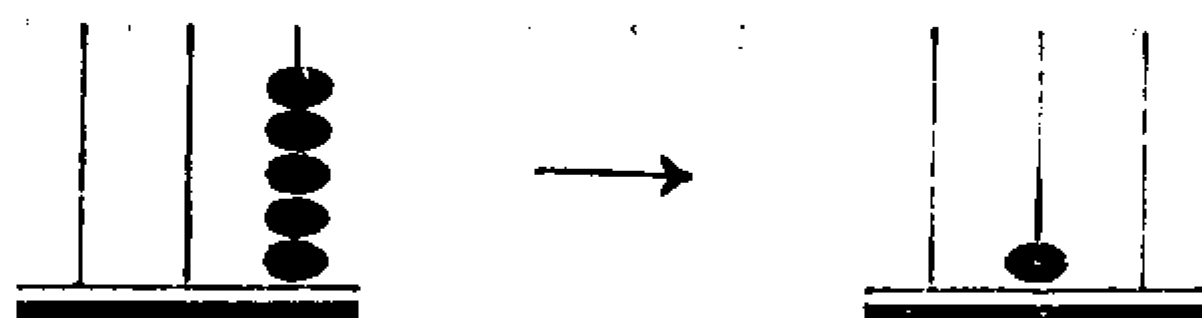
问 题 解 答

问题 1 13，132.

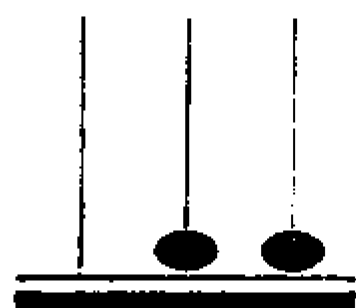
问题 2

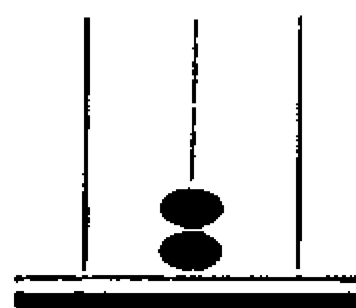
问题 3



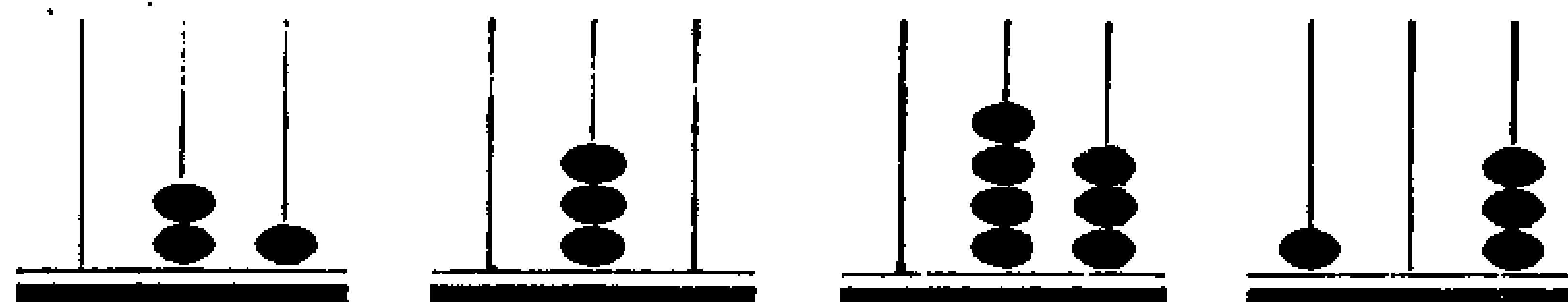
问题 4



问题 5



问题 6



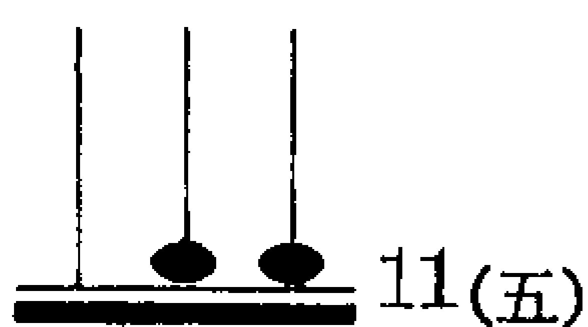
问题 7 2(五), 4(五).

问题 8 20(五), 11(五), 12(五), 124(五), 212(五), 403(五).

没有出现过数码5, 6, 7, 8, 9.

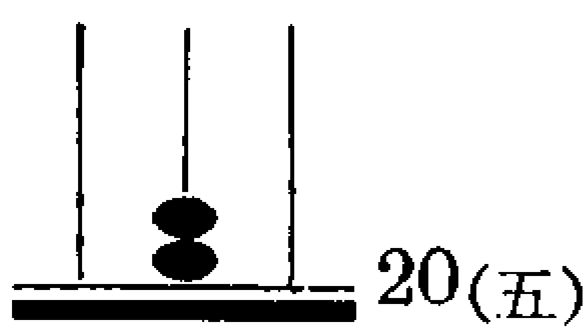
问题 9

6(十)

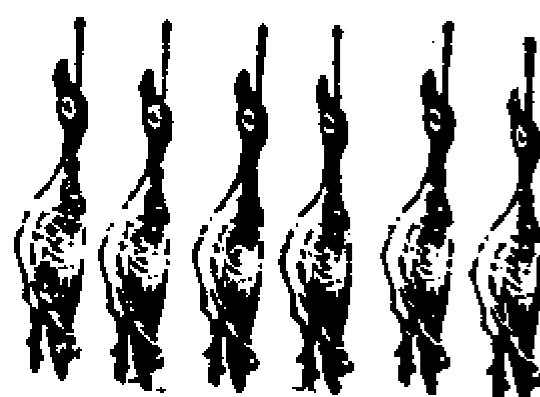


11(五)

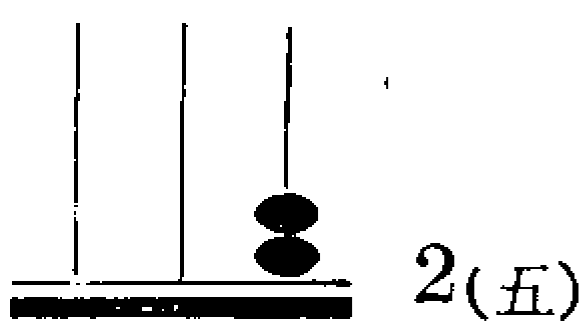
10(十)



20(五)



2(十)



2(五)

记　数　法

关于记数的方法，需要补充说几句。我们还是回到十进制数上来。

问题1　12中的“2”代表几？数21中的“2”代表几？231中的“2”代表几？这三个数中的数码“2”的意义一样吗？

可见，我们现在使用的记数法除了逢十进一外，还有个特征，就是：同样的一个数码写在不同的地位上，代表不同的数值。我们把具有这种特征的记数法叫做“地位制”。

不要以为“地位制”记数法的使用是很自然的。人类是通过了长期的摸索才找到这种较理想的记数法的。

古代埃及人的记数法是很直观的。

记号“|”代表1，记号“∧”代表10，

记号“ ”代表100，记号“ ”代表1000，

记号“ ”代表10000，记号“ ”代表100000，

记号“ ”代表1000000。

这些就是古埃及人的数码。他们没有2，3，4，……，9的专门记号，用重复书写的2个“1”，3个“1”，……来代表。

譬如：∧∧∧|| 代表32，

∧∧|||| 代表4324。

古斯拉夫人的数码最多了，不但有九个数码来代表1，2，3，……，9，而且有九个数码代表10，20，30，……，90，还有九个数码代表100，200，300，……，900。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
个		B	Г	Д		S		И	
十		K	Λ	M	N			П	Ч
百			T		Ф	X		W	

譬如：NA 代表51，

ЦMГ 代表943。

显然这些都不是地位制记数法。

我国古代有一种“筹算”，就是用一种叫“算筹”的小竹棍，排成一定形式来表示数目并进行计算的。用算筹表示数目时有两种摆法，一种叫纵式，一种叫横式，并规定：个位，百位，万位用纵式，十位，千位，十万位用横式。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

如果某一位上是0，那么空一位。譬如

𝍢𝍩𝍣 表示314，

𝍢𝍩𝍣𝍩𝍥 表示31416，

𝍢 𝍣 表示304。

我们看到，在算筹表示的数“𝍢𝍩𝍣”中，“𝍢”表示300个单位，“—”表示10个单位，“𝍣”表示4个单位；而在“𝍢𝍩𝍣𝍩𝍥”中，“𝍢”表示30000个单位，前面一个“—”表示1000个单位，后面的“—”表

示 10 个单位，“Ⅲ”表示 400 个单位，“丅” 表示 6 个单位。因此，我国“筹算”里所用的记数方法是符合地位制的，与现在的记数法原则上是一致的。

从这些例子中可以看出，同样是逢十进一地数数，但把数出来的数记录在纸上，却可以各不相同。我们还可以看出，地位制记数法比其他记数法简便得多。

总结一下我们目前使用的数，数数时用十进制；把数记录在纸上用地位制。所以，完整地说，这样的记数法可叫做十进地位制记数法。

问题 2 都是用十进制记数，古埃及的重复书写记数法要多少个数码？古斯拉夫的记数法要多少个数码？我们目前使用的地位制记数法要多少个数码？哪一种记数法数码最省？

问题 3 按地位制记数法，五进制数只需要用几个数码？八进制只需要用几个数码？十二进制需要几个数码？

问题解答

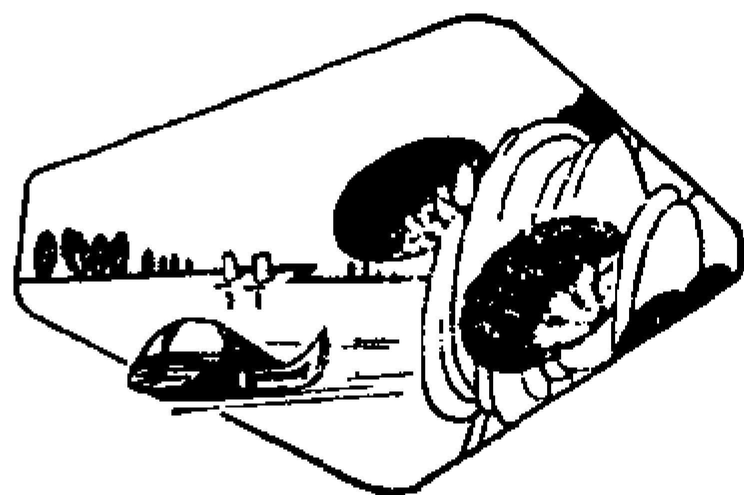
问题 1 “12”中的“2”代表 2 个单位 $(12=1\times10+2)$。“21”中的“2”代表 20 个单位 $(21=2\times10+1)$；“231”中的“2”表示 200 个单位 $(231=2\times100+3\times10+1)$。三个数中的“2”的意义是不同的。

问题2 古埃及和古斯拉夫人的记数法都需要无限多个数码. 地位制记数法只需0, 1, 2, ……, 9十个数吗?

问题3 五进制只需五个数码, 譬如可用0, 1, 2, 3, 4表示.

八进制只需八个数码, 譬如可用0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

十二进制需十二个数码, 譬如可用0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0′, 1′.

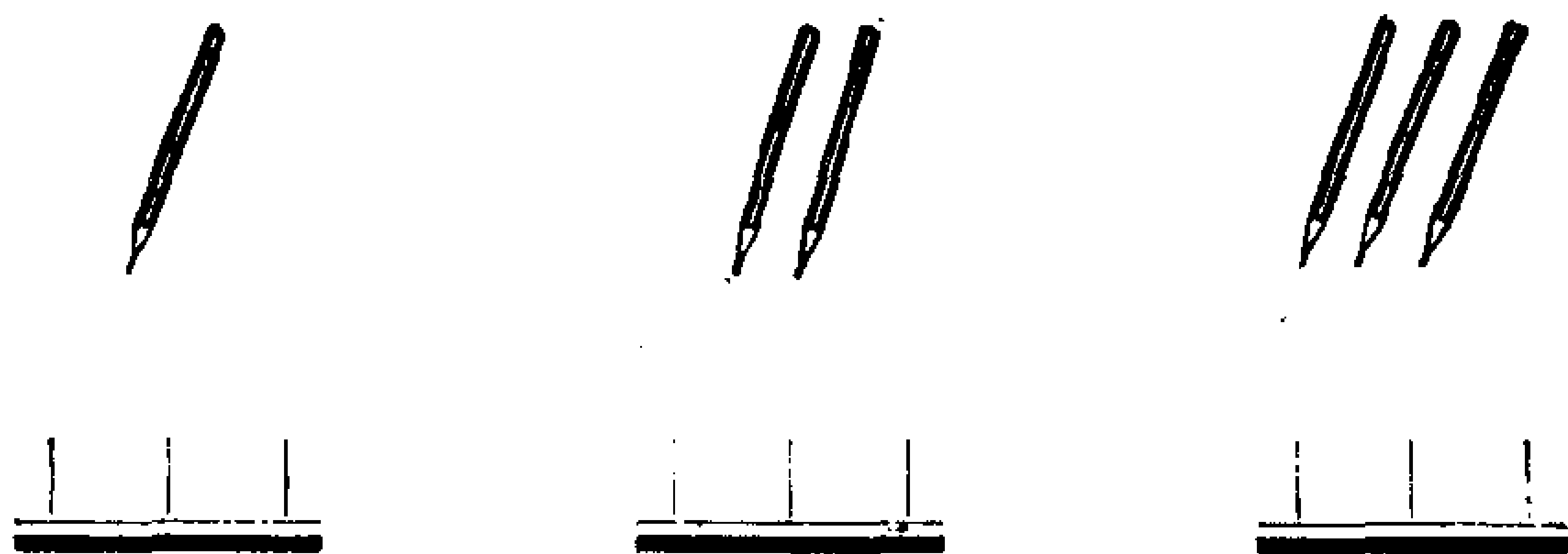


二 进 制 数

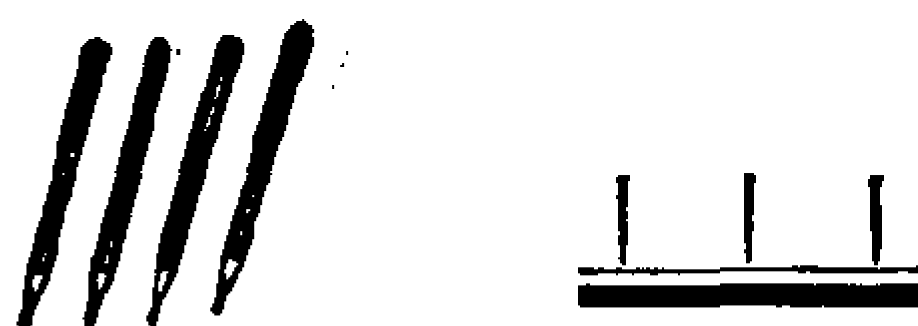
上面我们讲了用“逢十进一”原则数数，用地位制原则记数；用“逢五进一”的原则数数，仿照十进制的地位制原则记数．现在开始触及本书的主题——二进制数，就不难了．

用十个手指数数，产生十进制数；用五个手指数数，产生五进制数．假想有个民族用两只耳朵来数数，就是说利用“逢二进一”的原则计数（这当然仅仅是个假想），就会产生“二进制数”．为了方便，引进一架二进计数器（每根柱子上最多只能套两颗珠）．

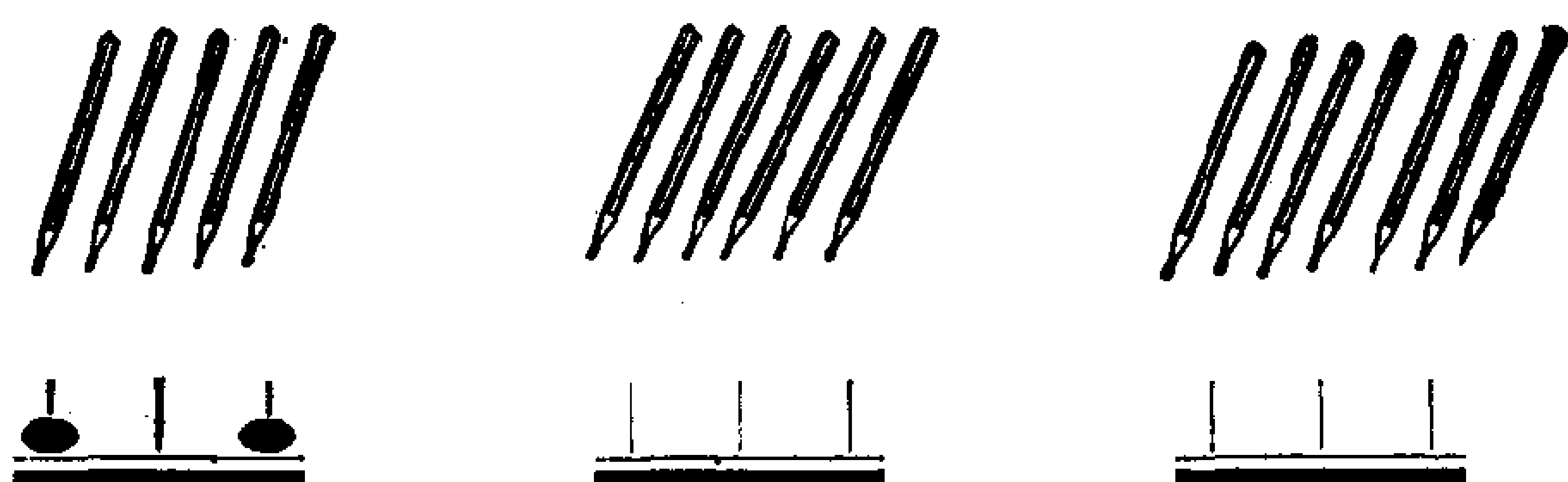
问题 1 如果有如图的若干支铅笔，请你按“逢二进一”的原则，在相应的图上画上珠儿．



问题 2 铅笔数如图，该怎么套珠？



问题 3 铅笔数如图，该怎么套珠？

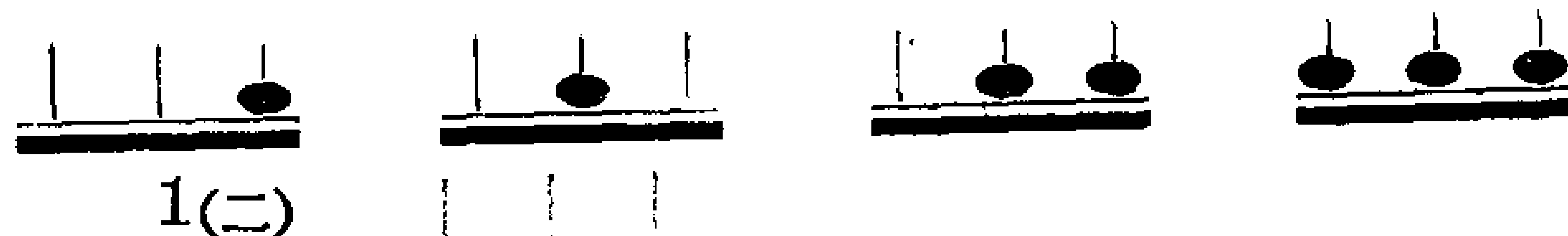


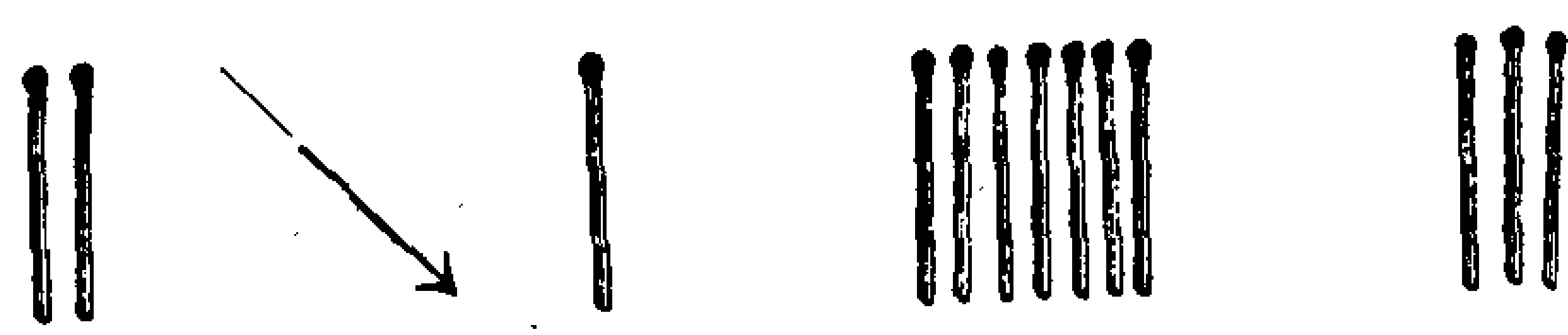
问题 4 铅笔数如图，该怎么套珠？

现在你已经能将数"储存"在二进计数器上（数数）了．进一步我们还要把储存在二进计数器里的数记录在纸上（记数）．

记数时仍然仿照十进地位制记数法，为了与十进制数区别，在按"逢二进一"所得的数（叫做二进制数）的右下角标明（二）．

问题 5 将下列二进计数器珠图记成一个二进制数，并和下面对应的火柴堆画上箭头．





问题6 (1) 将下列各堆火柴数(当然指十进制数)填在括号里。

(2) 将下列各堆火柴数先储存在二进计数器内，再写成二进制数。(顺便指出：100(二)可念作“一零零”，不要念作“一百”。)

① (4 根)→ → 100(二)

② (　　)→ → (二)

③ (　　)→ → (二)

④ (　　)→ → (二)

⑤ (　　)→ → (二)

⑥ ||||||| (　　)→ ┴┴┴┴ → 　　(二)

问题7　你认为用二进地位制记数，需要用几个数码？

问题解答

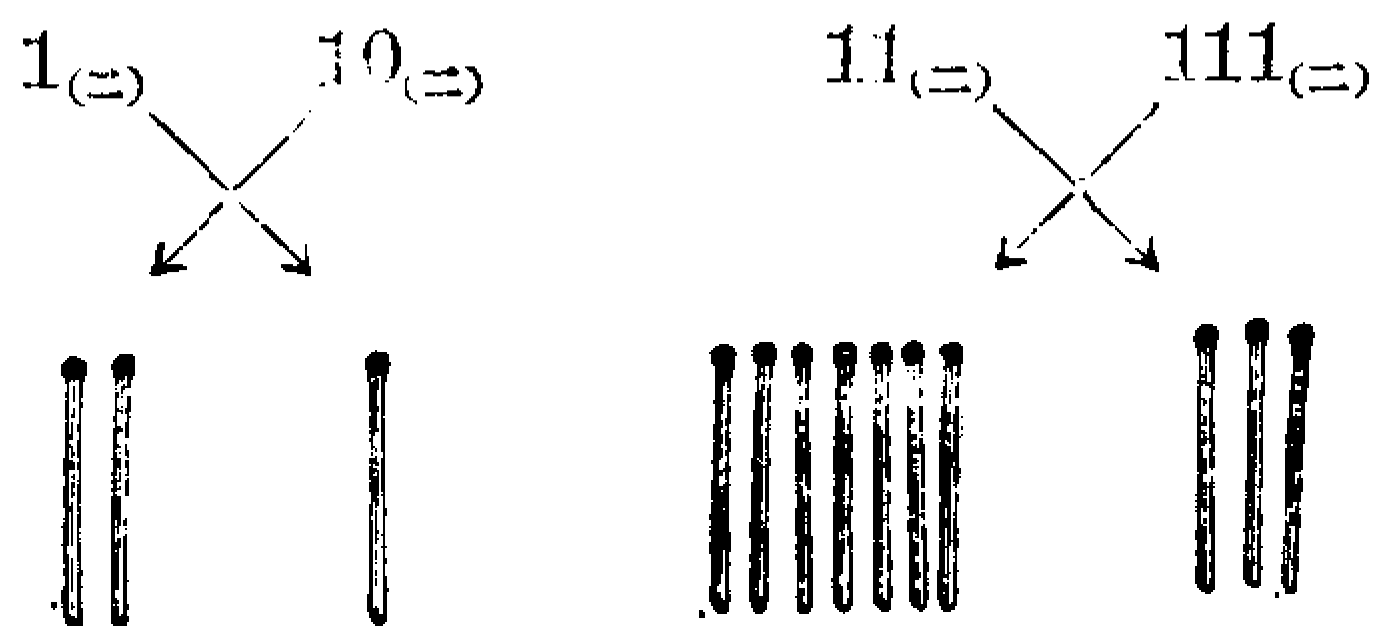
问题1

问题2

问题3

问题4

问题5



问题 6

① (4 根)⟶ ⟶ $100_{(二)}$

② (2 根)⟶ ⟶ $10_{(二)}$

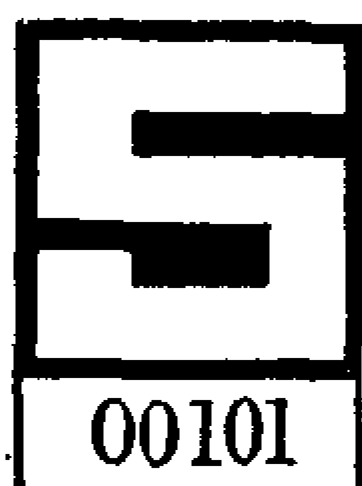
③ (5 根)⟶ ⟶ $101_{(二)}$

④ (6 根)⟶ ⟶ $110_{(二)}$

⑤ (7 根)⟶ ⟶ $111_{(二)}$

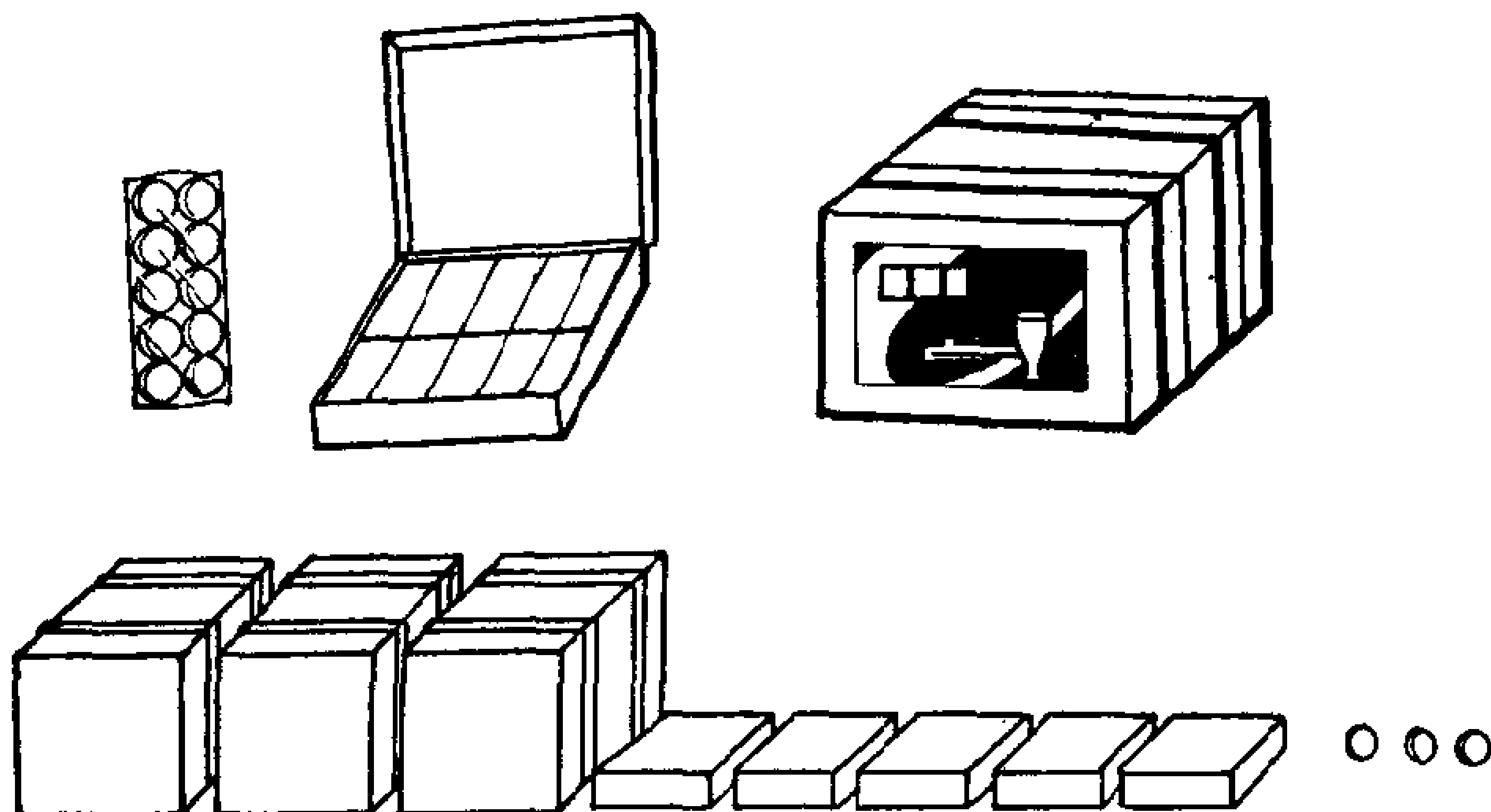
⑥ (8 根)⟶ ⟶ $1000_{(二)}$

问题 7 用二进地位制记数只需要两个数码：0 和 1.

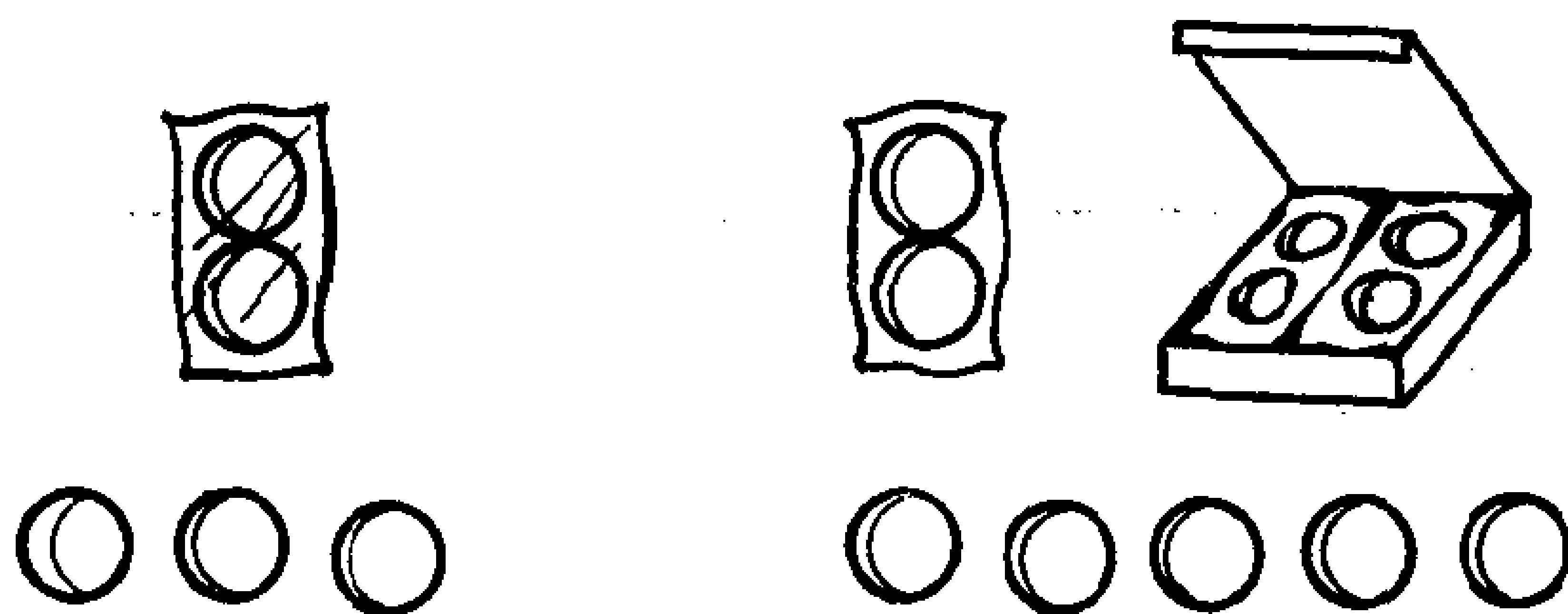


零件包装——“十翻二”

问题1 如果10只零件能装满1袋，10袋装满1盒，10盒可装满1箱子。现在有一批零件共装了3箱还多5盒零3个零件。这批零件共有几只？

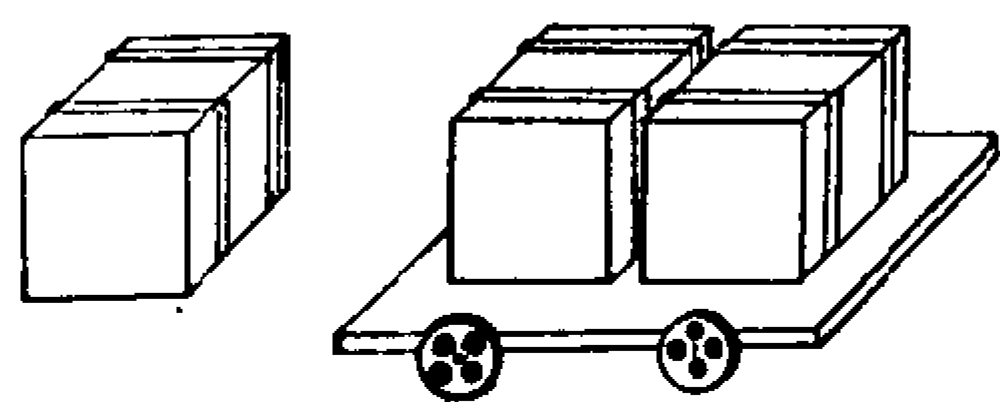


问题2 如果2只零件装1袋，现在有3只零件，可装几袋？还余几只零件？你用到了哪种运算？

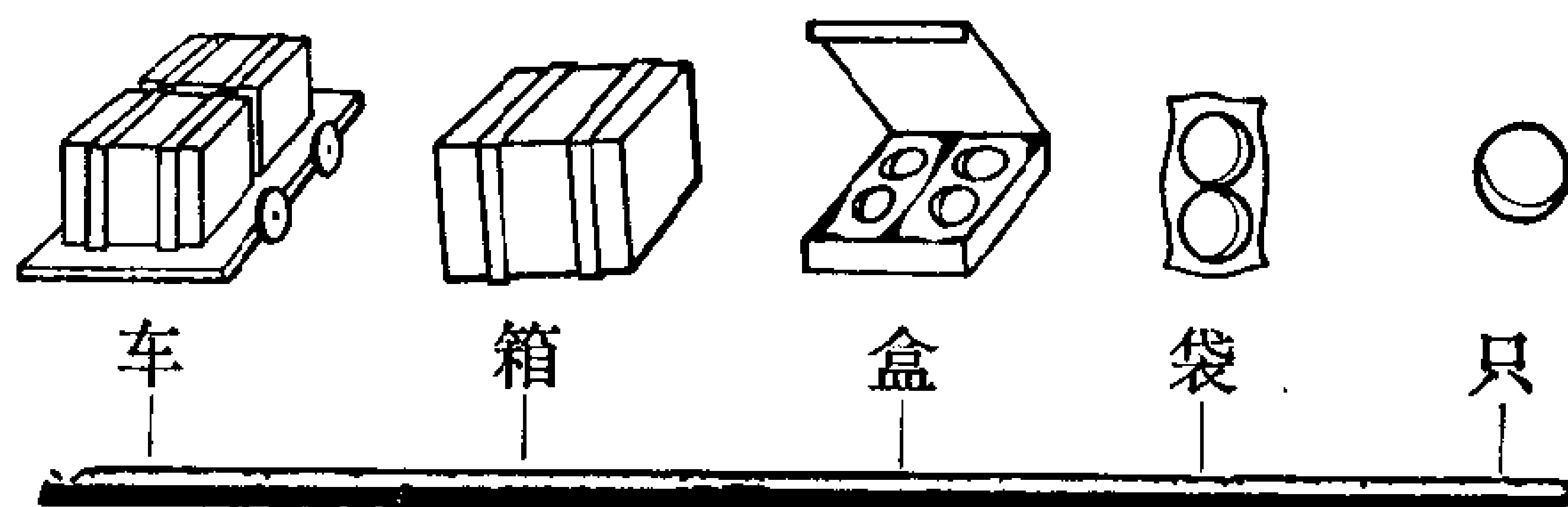


问题 3 如果 2 只零件装 1 袋，2 袋装 1 盒子，现在有 5 只零件：(1) 先考虑一下，可装几袋，余几只零件？(2) 再考虑可装满几盒子，余下的可装满几袋再余下几只零件？你用到哪种运算？

问题 4 如果上题中的 2 盒子可以装 1 箱子，2 箱子装 1 车子。现在有 21 只零件，先考虑一下可以装几袋，余几只零件？再考虑可以装几盒余几袋几只？……最后回答可装满几车子，余下可装满几箱，再余下的可装满几盒子，再余下几只零件？计算过程中你用到哪些运算。



把包装零件问题反映到二进计数器上。把只数储存在计数器的第一根柱上，袋数储存在第二根柱上，盒数储存在第三根柱上，箱数储存在第四根柱上，车数储存在第五根柱上。你觉得“零件包装”与“二进制数”有共同的地方吗？



问题 5 把问题 2，3，4 的结果表示在二进计数器上。由此你能否把十进制数翻译成二进制数？

$3_{(十)}=(\quad)_{(二)}$，$5_{(十)}=(\quad)_{(二)}$，$21_{(十)}=(\quad)_{(二)}$。

问题 6 6只零件可装满几车几箱几盒几袋几只？把结果表示在二进计数器上，再写成二进制数。

问题 7 根据以上方法，你能否填出：

$$7_{(十)}=\quad_{(二)},\qquad 9_{(十)}=\quad_{(二)},$$

$$8_{(十)}=\quad_{(二)},\qquad 11_{(十)}=\quad_{(二)}.$$

我们小结一下将十进制数翻译成二进制数（"十翻二"）的方法。

先以 $3_{(十)}$ 为例。因为二进制计数的原则是逢二进一，所以要想将 $3_{(十)}$ 化为二进制数，先要考虑 $3_{(十)}$ 里含有几个2。

$$3\div2=1\cdots\cdots(余\ 1).$$

就是说 $3_{(十)}$ 里有1个2还余1. 余数1便是 $3_{(十)}$ 对应的二进制数的第一位数字，商数1便是第二位上的数字。

$$\therefore\quad 3_{(十)}=11_{(二)}.$$

再以 $5_{(十)}$ 为例。$5_{(十)}$ 里有几个2呢？

$$5\div2=2\cdots\cdots(余\ 1).$$

余数1表示第一位数字，商数2表示第二位上的数字。第二位上的2还须逢二进一. 2里含有几个2呢？

$$2\div2=1\cdots\cdots(无余，即余数为\ 0).$$

余数0表示第二位上的数字，最后的商数1表示第三位上的数字。

$$\therefore \quad 5_{(十)}=101_{(二)}.$$

最后，以 $22_{(十)}$ 为例。根据上面的方法，不难看出应作一系列除数为 2 的除法：

$$22\div2=10\cdots\cdots1 \ (\text{个位}),$$
$$10\div2=5\cdots\cdots0 \ (\text{第二位}),$$
$$5\div2=2\cdots\cdots1 \ (\text{第三位}),$$
$$2\div2=1\cdots\cdots0 \ (\text{第四位}).$$

为了方便，不妨再写一个特别的除式，以上式的商 1 再除以 2，得

$$1\div2=0\cdots\cdots1(\text{第五位}).$$

$$\therefore \quad 21_{(十)}=10101_{(二)}.$$

上面一连串的计算可以缩写为：

$$\begin{array}{r|l}
2 & 2\ 1 \\ \hline
2 & 1\ 0\ \cdots\cdots1 \\ \hline
2 & \quad 5\ \cdots\cdots0 \\ \hline
2 & \quad 2\ \cdots\cdots1 \\ \hline
2 & \quad 1\ \cdots\cdots0 \\ \hline
 & \quad 0\ \cdots\cdots1
\end{array}$$

这个方法叫“除（以）2 取余”法。

问题 8 用缩简了的直式做下列各题：

(1) $25_{(十)}=\quad_{(二)}$； (2) $39_{(十)}=\quad_{(二)}$；

(3) $86_{(十)}=\quad_{(二)}$； (4) $129_{(十)}=\quad_{(二)}$。

问题解答

问题 1　3503 个.

问题 2　可装 1 袋余 1 只零件. 计算中用到了除法.

问题 3　(1) 可装 2 袋余 1 只零件;

(2) 可装 1 盒余 1 只零件.

计算中用到了除法.

问题 4　(1) 可装 10 袋余 1 只零件;

(2) 可装 5 盒余 1 只零件;

(3) 可装 2 箱 1 盒余 1 只零件;

(4) 可装 1 车 1 盒余 1 只零件.

计算中用到了除法.

问题 5　问题 2

盒 袋 只

$3_{(十)}=11_{(二)}$

问题 3

盒 袋 只

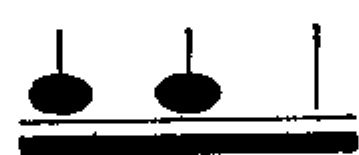
$5_{(十)}=101_{(二)}$

问题 4

车 箱 盒 袋 只

$21_{(十)}=10101_{(二)}$

问题 6　1 盒 1 袋.

　　$110_{(二)}$

问题 7　$7_{(十)}=111_{(二)}$;　$9_{(十)}=1001_{(二)}$;

$8_{(十)}=1000_{(二)}$;　$11_{(十)}=1011_{(二)}$.

问题 8

(1)

```
2|2 5
2|1 2 ······1
2|  6 ······0
2|  3 ······0
2|  1 ······1
    0 ······1
```

$\therefore\ 25_{(十)}=11001_{(二)}$.

(2)

```
2|3 9
2|1 9 ······1
2|  9 ······1
2|  4 ······1
2|  2 ······0
2|  1 ······0
    0 ······1
```

$\therefore\ 39_{(十)}=100111_{(二)}$.

(3)

```
2|8 6
2|4 3 ······0
2|2 1 ······1
2|1 0 ······1
2|  5 ······0
2|  2 ······1
2|  1 ······0
    0 ······1
```

$\therefore\ 86_{(十)}=1010110_{(二)}$.

(4)

```
2|1 2 9
2|  6 4 ······1
2|  3 2 ······0
2|  1 6 ······0
2|    8 ······0
2|    4 ······0
2|    2 ······0
2|    1 ······0
      0 ······1
```

$\therefore\ 129_{(十)}=10000001_{(二)}$.

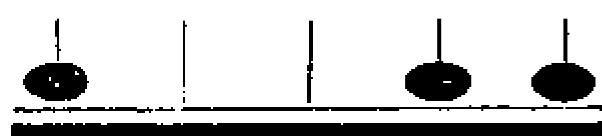
“二 翻 十”

我们已经学会了将十进制数翻译成二进制数．那么，怎样将二进制数翻译成十进制数呢？

问题 1 根据上节问题 2～4 中的包装方法，1 盒有几只零件？1 箱呢？1 车呢？如果现在有 1 车 1 袋余 1 只零件，问共有几只零件？

问题 2 二进计数器的第一根柱上的一颗珠代表 1 只零件，第二根柱上一颗珠代表 2 只零件，那么，第三根柱，第四根柱，第五根柱上的一颗珠分别代表几只零件呢？

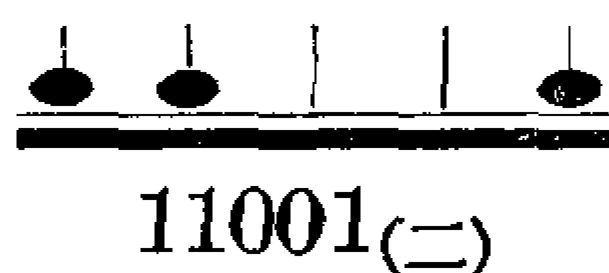
如下珠图代表了几只零件？



问题 3 把问题 2 前半部分的结果填入下列表格：

二进计数器上	第一根柱	第二根柱	第三根柱	第四根柱	第五根柱	第六根柱
每颗珠代表的二进制数	1	10	100	1000		
每颗珠代表的十进制数	1	$2(2^1)$	$4(2^2)$			

于是你就会将一个二进制数翻译成十进制数了。例如对于二进制数 $11001_{(二)}$，我们可以将它看成是二进计数器上第一，四，五根柱上分别有一颗珠，其余各



$11001_{(二)}$

柱上没有珠的一个珠图。根据上面的表格，第一，四，五根柱上的每颗珠分别代表十进制数 1, 8, 16，所以

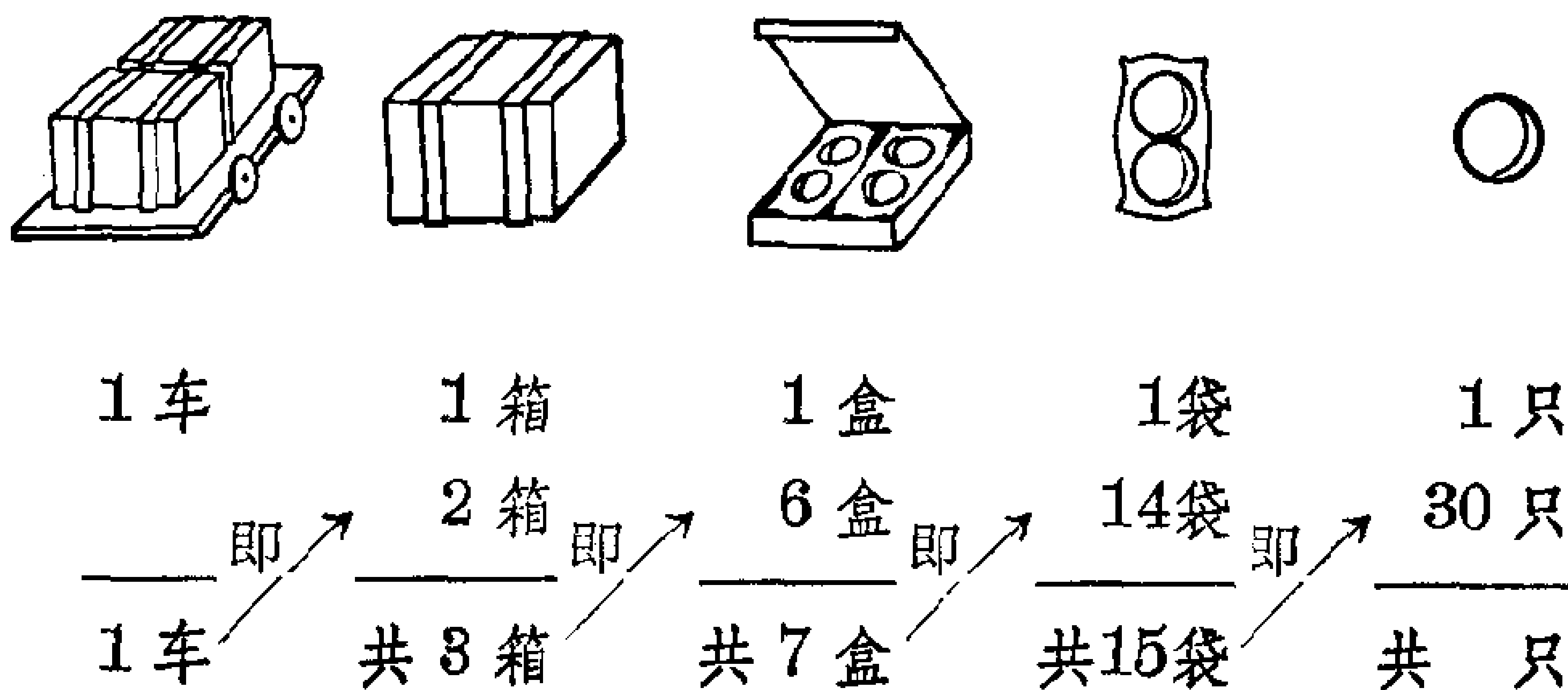
$$11001_{(二)}=1_{(十)}+8_{(十)}+16_{(十)}=25_{(十)}.$$

问题 4 将 $1010_{(二)}$，$10001_{(二)}$ 化为十进制数。

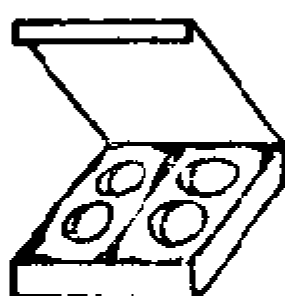
问题 5 二进计数器的第八根柱，第十根柱上的一颗珠分别代表一个怎样的十进制数？

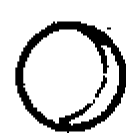
对于“二翻十”除了上面的方法外，还可按下面的方法进行。

问题 6 现在有 1 车 1 箱 1 盒 1 袋 1 只零件，问这批零件共几只？下图是计算这批零件的过程。



问题 7 按问题6的方法求下列一批零件的只数：

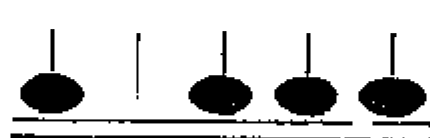




1车	0箱	1盒	0袋	1只
	□箱	□盒	□袋	□只
1车 ↗	共□箱 ↗	共□盒 ↗	共□袋 ↗	共□只

问题 8 下列二进计数器的珠图反映了一批零件的只数，这批零件有多少只？

车箱盒袋只



车箱盒袋只

这里介绍的就是“二翻十”的第二个方法．你会用这个方法把二进制数化为十进制数吗？在具体计算时，可采用下列直式：

二进制数	1	1	0	1	1
+		2	6	12	26
	1 ↗×2	3 ↗×2	6 ↗×2	13 ↗×2	27

$$\therefore\quad 11011_{(二)}=27_{(十)}.$$

更简单地，可写作

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 6 & 12 & 26 \\ \hline 1, & 3, & 6, & 13, & 27 \end{array}$$

问题 9 "二翻十"(用第二种方法):

(1) 1010　　(2) 1111

(3) 1000　　(4) 11101

问 题 解 答

问题 1 1 盒有 4 只, 1 箱有 8 只, 1 车有 16 只零件; 1 车 1 袋余 1 只零件共 19 只零件.

问题 2 第三根柱, 第四根柱, 第五根柱上的一颗珠分别代表 4, 8, 16 只零件; 19 只.

问题 3

二进计数器上	第一根柱	第二根柱	第三根柱	第四根柱	第五根柱	第六根柱
每颗珠代表的二进制数	1	10	100	1000	10000	100000
每颗珠代表的十进制数	1	$2(2^1)$	$4(2^2)$	$8(2^3)$	$16(2^4)$	$32(2^5)$

问题 4 $1010_{(二)}=10_{(十)}$; $10001_{(二)}=17_{(十)}$.

问题 5 $2^7=128$; $2^9=512$.

问题 6 31 只.

问题 7

$$\begin{array}{ccccc} 1\text{车} & 0\text{箱} & 1\text{盒} & 0\text{袋} & 1\text{只} \\ & \nearrow 2\text{箱} & \nearrow 4\text{盒} & \nearrow 10\text{袋} & \nearrow 20\text{只} \\ \hline 1\text{车} & 2\text{箱} & 5\text{盒} & 10\text{袋} & 21\text{只} \end{array}$$

所以这批零件共 21 只.

问题 8　30 只，23 只.

问题 9

(1)
$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 4 & 10 \\ \hline 1, & 2, & 5, & \mathbf{10} \end{array}$$

$\therefore\ 1010_{(二)}=10_{(十)}$.

(2)
$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 6 & 14 \\ \hline 1, & 3, & 7, & \mathbf{15} \end{array}$$

$\therefore\ 1111_{(二)}=15_{(十)}$.

(3)
$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 4 & 8 \\ \hline 1, & 2, & 4, & \mathbf{8} \end{array}$$

$\therefore\ 1000_{(二)}=8_{(十)}$.

(4)
$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 6 & 14 & 28 \\ \hline 1, & 3, & 7, & 14, & \mathbf{29} \end{array}$$

$\therefore\ 11101_{(二)}=29_{(十)}$.

电　子　秤

问题 1　你带了许多一分，二分，五分的硬币到商店里去买十件商品，这十件商品的价格分别是一分，二分，三分，……，一角，现在要你分别付费时，每次都不需要找零，你能做得到吗？如果限制每次付费时每一种硬币只许用一枚，你能做得到吗？

问题 2　如果有 1 分，2 分，4 分，8 分的邮票各一张，那么可以组成几种不同的值？

问题 3　如果有 1 克，2 克，4 克，8 克，16 克的砝码各一只，那么能组成几种不同的重量．

在向四个现代化进军中，"丰收粮店"职工大搞技术革新，设计制造了一架电子秤．过去售米用人工过磅，现在只要手按电钮，粒粒白米就自动地徐徐下落，到指定的斤数，米又自动停止下落，既省力又准确．

在这台电子秤里，粮食重量是由砝码控制的．砝码又是用电钮控制的．譬如手按写着"30 斤"的电钮，某几个砝码就自动地被挑选出来，这几个砝码合起来代表 30 斤，这样就能自动地称出 30 斤重的粮食了．所以这架电子秤需要一套砝码，否则就无法自动过磅了．

为了称出100斤以内的各种重量（整数斤），丰收粮店的职工老王、小李、老张各提出了一套配备砝码的方案。

老王打算用1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90斤的砝码各一只，共18只。

小李认为只要类似人民币的角分的票面额一样，准备用1斤，2斤，5斤，10斤，20斤，50斤的砝码各一只。

老张的建议可与他们两人都不同，建议用1斤，2斤，4斤，8斤，16斤，32斤，64斤的砝码各一只。

问题4 你认为这三种意见哪种是可行的，哪种是不可行的？在可行的意见中，哪种意见更好一些？

问题5 粮店决定采用老张的方案。用这套砝码怎样组成50斤？还有别的方法组成50斤吗？

问题6 用这套砝码，怎样组成30斤，40斤，42斤，80斤，93斤，95斤？还有别的组成方法吗？

问题7 会不会有些重量（100斤以内的整数斤）无法用这套砝码称出？

问题8 仍利用这个方案，如果想使这个电子秤能称到200斤，那么还要增加几个砝码？这些砝码是代表几斤的？

问题9 （1）你认为100以内的自然数，都能由1, 2, 4, 8, 16, 32, 64这七个数中某几个数相加（而

且每个数只允许用一次)得到吗?会不会有些数无法用这七个数中某几个数的和表示?

(2) 如果一个数已经用 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 这七个数中某几个数相加而得到, 能不能用这七个数中另外几个数相加而得到.

问题 10 用 1, 2, 4, 8, 16, 32 斤六个砝码,实际上可以称出的最大斤数是多少?如果加一个代表 64 斤的砝码,可以称出的最大斤数是多少?

因为一个十进制数总可以化为二进制数, 而二进制数中各位上的"1"分别表示十进制数中的 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ……. 因此, 任何一个十进制数总可以看成是 1, 2, 4, 8, 16, 32, ……这些数中的某几个的和. 这便是老张方案可以采用的原理.

一个十进制数只能化成唯一的一个二进制数; 反过来,一个二进制数也只能化成唯一的一个十进制数. 这种关系,我们叫做一一对应. 就是说,十进制数与二进制数是一一对应的. 读了上面"十翻二","二翻十"的几节,你已经可以看出这一点了,这里再强调一下.

问题解答

问题 1 (1) 能. (2) 如限制用一枚, 能组成的币值除 1 分, 2 分, 5 分外, 还有:

3 分=2 分+1 分，　　　6 分=5 分+1 分，

7 分=5 分+2 分，　　　8 分=5 分+2 分+1 分.

问题 2　除 1 分，2 分，4 分，8 分外，还有：

3 分=2 分+1 分，　　　5 分=4 分+1 分，

6 分=4 分+2 分，　　　7 分=4 分+2 分+1 分，

9 分=8 分+1 分，　　　10 分=8 分+2 分，

11 分=8 分+2 分+1 分，　12 分=8 分+4 分，

13 分=8 分+4 分+1 分，　14 分=8 分+4 分+2 分，

15 分=8 分+4 分+2 分+1 分.

问题 3　可组成 1～31 克的整数斤.

问题 4　老王、老张的建议是可行的，小李的建议不可行. 根据老张的建议用的砝码最少，所以从这个角度说，老张的方案更好些.

老王的方案实际上与斯拉夫人的记数法类似. 对于老张的方案，请你与第 30 页问题 3 的表格中二进制数与十进制数换算表对照，它与二进制有关系. 小李的方案中，如果各种砝码不止一只，譬如"1"斤的砝码有若干只，"10"斤的砝码也有若干只，那么他的方案也是可行的. 这样的改进方案与古埃及重复书写的记数法有点相近了.

问题 5　50=32+16+2，并且没有别的方法可以组成 50 斤.

问题 6　30=16+8+4+2，

40=32+8，

42=32+8+2，

80=64+16，

93=64+16+8+4+1，

95=64+16+8+4+2+1.

并且组成的方法是唯一的.

问题 7 不会.

问题 8 需增加 128 斤的砝码一只.

问题 9 (1) 能;不会. (2) 不能. 说明表示的方法是唯一的.

问题 10 (1) 最大斤数是 63 斤. (2) 增加代表 64 斤的砝码后,可称出的最大斤数为 127 斤.

01000

猜 年 龄

下面有六张表：

表 1

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,
23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43,
45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63.

表 2

2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22,
23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, 42, 43,
46, 47, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 62, 63.

表 3

4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22,
23, 28, 29, 30, 31, 36, 37, 38, 39, 44, 45,
46, 47, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63.

表 4

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42, 43, 44, 45,
46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.

表 5

16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 48, 49, 50, 51, 52, 53,
54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.

表 6

32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42,
43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53,
54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63.

我们可以用这六张表来猜年龄，不过这个人的年龄要在63岁之内.

小英的年龄是11岁，我是不知道的. 我问:“你的年龄在哪几张表里写着?”

小英如实地回答:“表1，表2，表4三张表中写着我的年龄.”(请你帮小英检查一下，她说得对吗?)

我马上就可以告诉小英:“你的年龄是11岁.”你一定会非常惊奇，我是怎样知道的呢? 不是我本领大，实际上是小英“告诉”我的，当然她没有直接告诉我，但间接地告诉我了. 小英回答说:“表1，表2，表4这三张表中写着我的年龄.”请你看表1，表2，表4这三张表的第一个数分别是几? 是1，2，8，这三个数加起来不就是11吗? 你看，不是小英“告诉”我的吗?

请你试验一下，别的数目是不是适用这个规律?问

题的奥妙全在这六张表里。那末这些表是怎样制作出来的呢？

在上节里我们已经知道：一个自然数总能表示为1, 2, 4, 8, 16, 32, …… 这些数中某几个数的和，而且表示的形式只有一种。譬如：

$$11=1+2+8, \quad 15=1+2+4+8.$$

问题1 将23, 27, 63表示为1, 2, 4, 8, 16, 32, ……中某几个数的和的形式（如果你感到困难，可以将这些数先化为二进制数）。

组成11的和式里有1, 2, 8三个加数。组成15的和式里有1, 2, 4, 8四个加数。将63以内的每一个数都表示为这种形式的和。然后，凡是加数里有1的（如11, 15, ……）组成第一表，凡是加数里有2的（如11, 15, ……）组成第二表，凡是加数里有4的（如15, ……）组成第三表，……这就是造表的方法。

问题2 如果请你来造这张表，“3”应该填在哪几张表里？“5”应该填在哪几张表里？10, 11, 12, 13呢？34, 55, 61呢？

问题3 如果有一个数，第一表，第三表，第五表中都有，其他表中没有，这个数是几？这个数表示为二进制数是几？

问题4 如果要把可猜年龄的范围扩大到100岁以内，应怎么办？请你设计一下。

问 题 解 答

问题 1 $23=1+2+4+16$ （$\because$ $23_{(十)}=10111_{(二)}$）；

$27=1+2+8+16$ （$\because$ $27_{(十)}=11011_{(二)}$）；

$63=1+2+4+8+16+32$

（$\because$ $63_{(十)}=111111_{(二)}$）；

问题 2 “3” 填第 1，2 表 （$\because$ $3=1+2$）；

“5” 填第 1，3 表 （$\because$ $5=1+4$）；

“10” 填第 2，4 表 （$\because$ $10=8+2$）；

“11” 填第 1，2，4 表 （$\because$ $11=8+2+1$）；

“12” 填第 3，4 表 （$\because$ $12=8+4$）；

“13” 填第 1，3，4 表 （$\because$ $13=8+4+1$）；

“34” 填第 2，6 表 （$\because$ $34=32+2$）；

“55” 填第 1，2，3，5，6 表

（$\because$ $55=32+16+4+2+1$）；

“61” 填第 1，3，4，5，6 表

（$\because$ $61=32+16+8+4+1$）.

问题 3 这个数是 $1+4+16=21$.

$21_{(十)}=10101_{(二)}$.

问题 4 应再制第七表．并在 1～6 表后面作补充．

第一表后应补充的数：65，67，69，71，73，75，77，79，81，83，85，87，89，91，93，95，97，99.

第二表后应补充的数：66，67，70，71，74，75，78，79，82，83，86，87，90，91，94，95，98，99.

第三表后应补充的数：68，69，70，71，76，77，78，79，

84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 100.

第四表后应补充的数：72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.

第五表后应补充的数：80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95.

第六表后应补充的数：96, 97, 98, 99, 100.

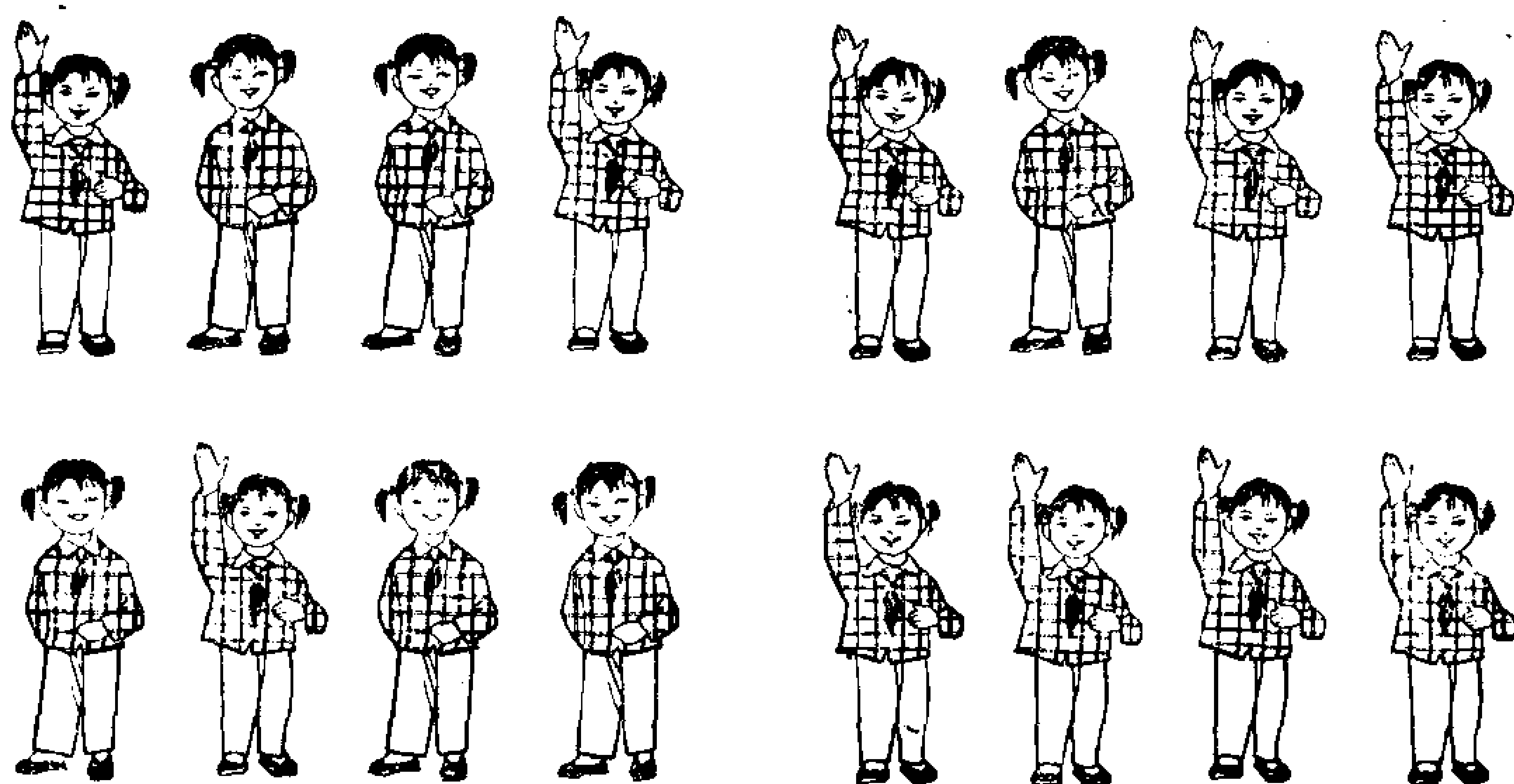
新添制的第七表：64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

使机器认识数

游戏 请几个小朋友到讲台上排成一行，每人带着两块牌子，一块写着“0”，另一块写着“1”。游戏时，每人用一块牌子放在胸前，把另一块藏起来。这样一排人就可以表示一个二进制数。然后，让坐在座位上的同学翻译成十进制数。看谁翻译得正确迅速。

这样每人只需准备两块牌子。如果我们不用牌子，而约定用动作来表示数码，譬如说举手表示“1”，不举手表示“0”，能不能表示数？

问题 1 下面的情况，分别表示怎样的二进制数？并将它们分别化为十进制数。

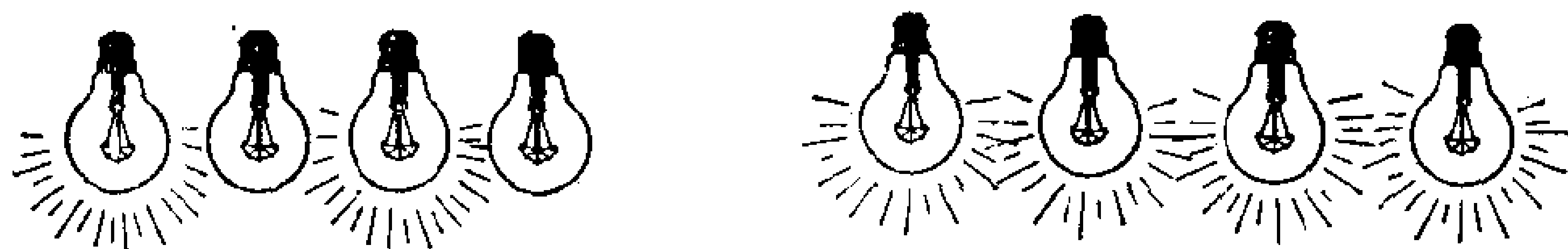


问题2 (1) 两个人排成一行表示十进制数，可代表多少个十进位数；每人要准备几块数码牌(或规定几个不同的动作)？

(2) 两个人排成一行表示二进制数，可代表几个数，每人只需准备几块数码牌(或只需约定几个动作)？

如果约定电灯熄灭表示“0”，电灯亮表示“1”，那末一排电灯就可以表示一个二进制数。

问题3 下面的情况分别表示什么二进制数？并将它们化为十进制数。



电报员用长音和短音两种讯号的互相配合来表示0, 1, 2, ……, 9 十个数字，然后再用一个四位的十进制数表示一个汉字。例如“0022”代表“中”，“0948”

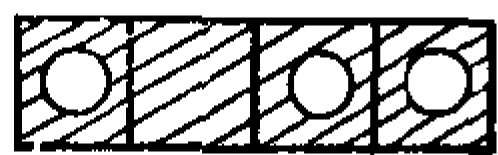
代表“国”。

仿照电报通讯，我们借用长音和短音两种讯号，约定短音“啊”表示“0”，长音“啊 —”表示“1”，就可以用一串声音表示一个二进制数了。

问题 4 试用上面的方法来传递 $1101_{(二)}$，$1001_{(二)}$，$0011_{(二)}$，并化成十进制数。

用画着一行方格的纸来表示二进制数。约定在格子里打洞表示“1”，在格子里不打洞表示“0”。

问题 5 下面的方格纸分别表示怎样的两进制数？并将它们化为十进制数。



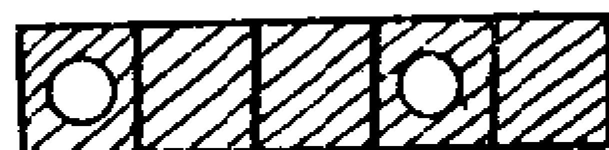
由上面的这些练习可以看出：因为二进制数的每一位数字只有两种可能，因此用一行小朋友来表示二进制数，每人只需做两种不同的动作；用一排“元件”（如电灯泡）来表示二进制数时，每个“元件”只要具有两种不同的状态，“亮”与“不亮”就行了，这比较容易办到。而表示十进制数，就要具有十种不同的状态。要一个元件表示出十种状态是很困难的。电子计算机里使用二进制数的主要原因就在这里。

那么，怎么使电子计算机“认识”你所要计算的数据呢？人们用纸带上穿孔的办法来告诉电子计算机（参见第十七节）。

问题 6 下面就是用二进制数来表示十进制数 0, 1, 2, ……9 十个数字的穿孔式样。请将空白的地方补完整。

十进制数	二进制数	穿孔纸带
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4		
5		
6		
7		
8		
9		

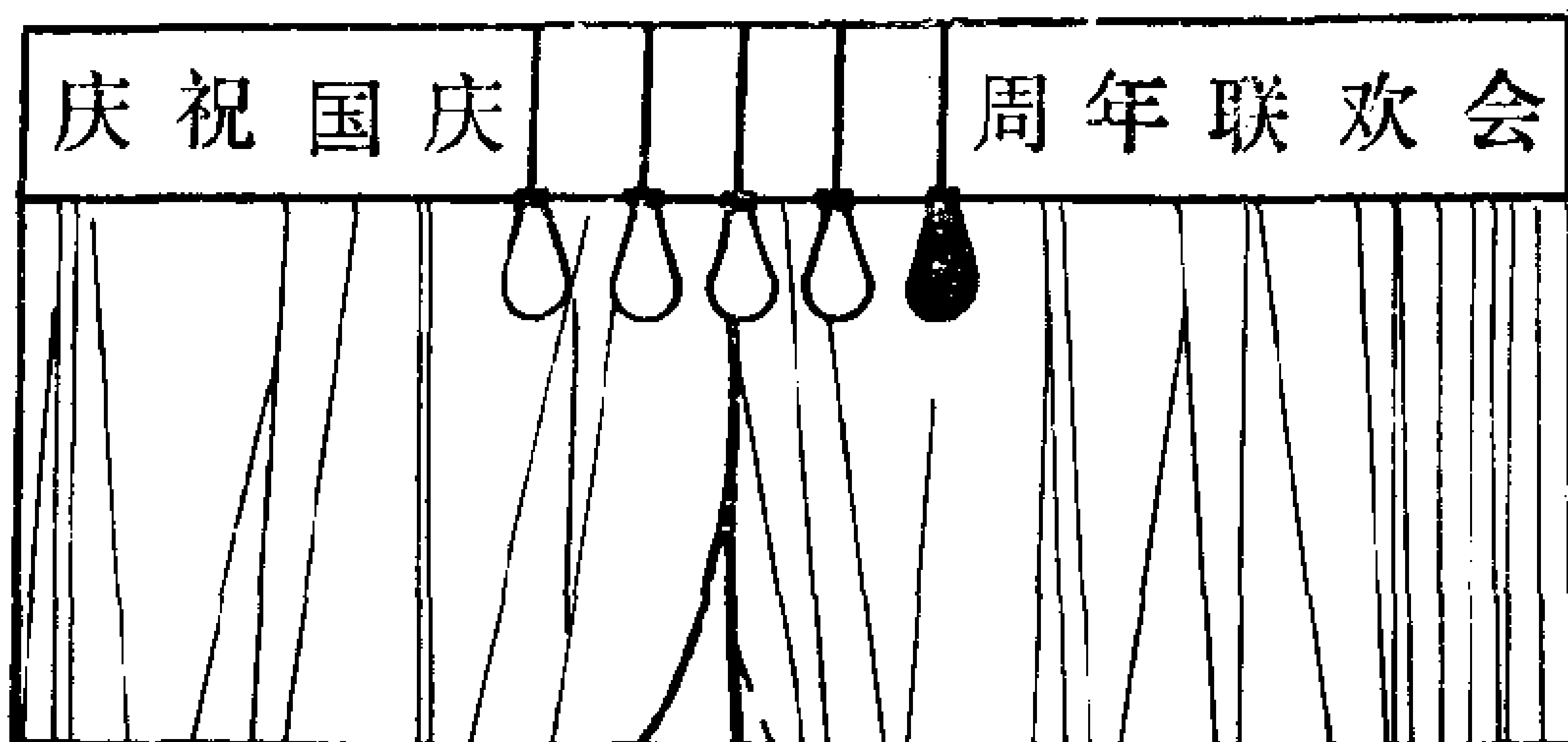
有人会问：那么更大一些的十进制数，如 $18_{(十)}$ ($10010_{(二)}$) 的穿孔纸带的形式是不是如下图呢？



不是的。这一点，留到以后再作介绍。

最后，再做一个练习。

问题 7　在某校的 1979 年国庆晚会上，有一串如图的灯泡。这串灯泡表示什么意思？



问题解答

问题 1　$1001_{(二)}=9_{(十)}$，　$1011_{(二)}=11_{(十)}$，

$100_{(二)}=4_{(十)}$，　$1111_{(二)}=15_{(十)}$.

问题 2　(1) 一百个十进制数（0～99），每人需准备 10 块不同的数码牌(0～9).

(2) 四个二进制数(00, 01, 10, 11)，每人只需准备两块不同的数码牌（0, 1）.

问题 3　$1010_{(二)}=10_{(十)}$，

$1111_{(二)}=15_{(十)}$.

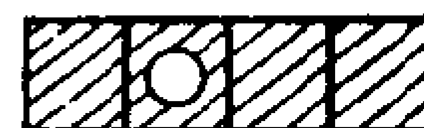
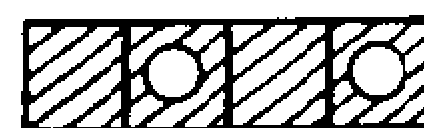
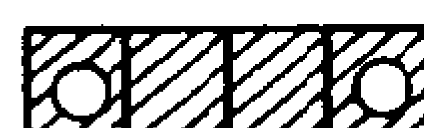
问题 4　$1101_{(二)}$:　啊——，啊——，啊，啊——，$13_{(十)}$.

$1001_{(二)}$:　啊——，啊，啊，啊——，$9_{(十)}$.

$0011_{(二)}$:　啊，啊，啊——，啊——，$3_{(十)}$.

问题 5　$1011_{(二)}=11_{(十)}$，

$0111_{(二)}=7_{(十)}$.

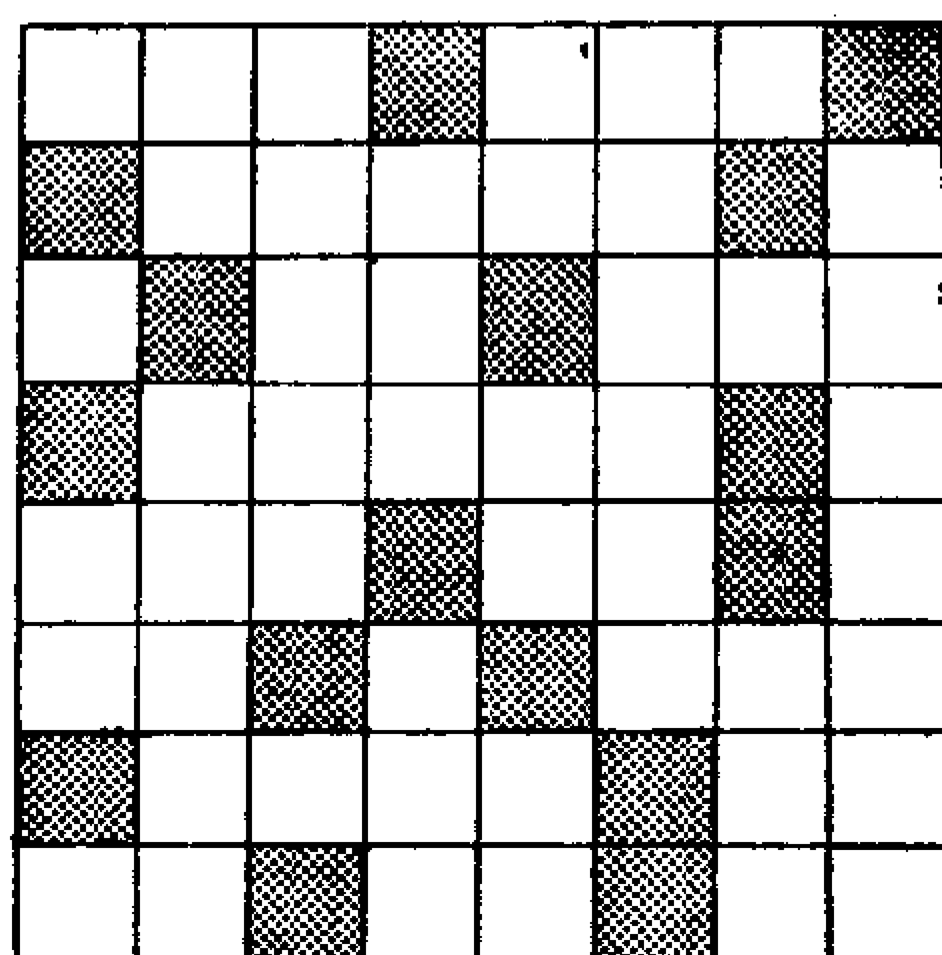
问题6	十进制数	二进制数	穿孔带
	4	0100	
	5	0101	
	6	0110	
	7	0111	
	8	1000	
	9	1001	

问题7 $11110_{(二)}=30_{(十)}$.

有趣的方格纸

在一张方格纸上开一些孔，成为一张“天窗纸”，可作秘密通讯工具使用。

下面就是一张“天窗纸”。在 8×8 格的方格纸上开了 16 个孔。



另外用一张同样大小的方格纸，将天窗纸覆盖在它上面，在空洞的地方填入数码。这样可以填 16 个数码。如果四个数码组成一个号码，代表一个汉字，那么，16 个数码，可以传递 4 个汉字的情报。将天窗纸转(不妨是顺着时针方向) 90°，又留出了 16 个空洞，再填 16 个数码。再转 90°，……有趣的是转了四次，一共填进了 64 个数码，正好把下面纸的方格填满，不会有一

格是重复的，也不会有一格遗漏。你不妨试一试。

这张填满数字的纸可以传递包含16个字的情报。

收件的人要看懂这份情报，必须制作一个与书写情报的人同样的天窗纸，按书写的次序先后覆盖在情报纸上，将情报译出。

如果情报不幸落入敌人手中，即使敌人知道填写的方法，但不知道天窗纸上孔的位置，也是没法破译的。因为这种天窗纸16个孔的开法有40多亿种，所以要想猜出来，如同大海里捞针，是很难有结果的。

但是地下工作的同志要保藏一张天窗纸也是十分危险的，只有在脑子里记住空格的位置才保险。怎样才能记住这张毫无规律的天窗纸呢？

我们可以利用二进制数。因为二进制数可以用两种状态来表示，反过来，具有两种状态的任何东西，都可以记成一个二进制数。

天窗纸的每格具有两种状态：有孔和无孔。我们把有孔记作1，无孔记作0. 那末8×8格的天窗纸，可以看成是8个8位的二进制数。记住了这8个二进制数就记住了这张天窗纸。

但是，8个二进制数仍不容易记牢，我们可以把8个二进制数翻译成8个十进制数，记忆就方便了。

作为练习，请你把上面这张天窗纸对应的8个二进制数写出来，它们代表哪8个十进制数。

问题解答

$10001_{(二)}=17_{(十)}$，

$1001000_{(二)}=72_{(十)}$，

$10010_{(二)}=18_{(十)}$，

$10000100_{(二)}=132_{(十)}$，

$10000010_{(二)}=130_{(十)}$，

$10000010_{(二)}=130_{(十)}$，

$101000_{(二)}=40_{(十)}$，

$100100_{(二)}=36_{(十)}$.

$1+1=10$——二进制数的加法

我们已经认识了二进制数，但这还不够。我们还得研究一下二进制数的运算。

先来看加法的法则应该是怎样的。

问题 1 在二进计数器上做加法

$$0+0=?\quad 0+1=?\quad 1+0=?$$

0 + 0 = (?)

0 + 1 = (?)

1 + 0 = (?)

这个练习是不难的，看下面的

$$1+1=?$$

1 + 1 = (?)

有人可能会得出 $1+1=2$，不要忘记，在二进计数器上，逢二要进一，所以

$$1_{(二)} + 1_{(二)} = \quad = 10_{(二)}$$

这样我们得出了二进制加法的基本法则：

$$0+0=0, \quad 0+1=1,$$
$$1+0=1, \quad 1+1=10.$$

可以归纳如下表：

+	0	1
0	0	1
1	1	10

前三条大家是不会有异议的，第四条，$1+1$ 竟然得到 10，好象是不可思议的。其实，我们如果用十进制数来对比，也就可以理解了。十进制数“逢十进一”，$9+1=10$；而二进制数“逢二进一”，因此 $1+1=10$ 了。

另外，我们也可以把它化成十进制数来验证。验证的步骤如下：

(1) 将加数和被加数 $1_{(二)}$ 化为十进制数 $1_{(十)}$；

(2) 求所得两个十进制数的和，得 $2_{(十)}$；

(3) 将这个和化回二进制数，即 $10_{(二)}$。它显然就是原来两个二进制数的和。

二进制数		十进制数
$1_{(二)}$	→	$1_{(十)}$
$+\ 1_{(二)}$	→	$+\ 1_{(十)}$
$10_{(二)}$	←	$2_{(十)}$

我们看到，在二进制数中确有 $1+1=10$。

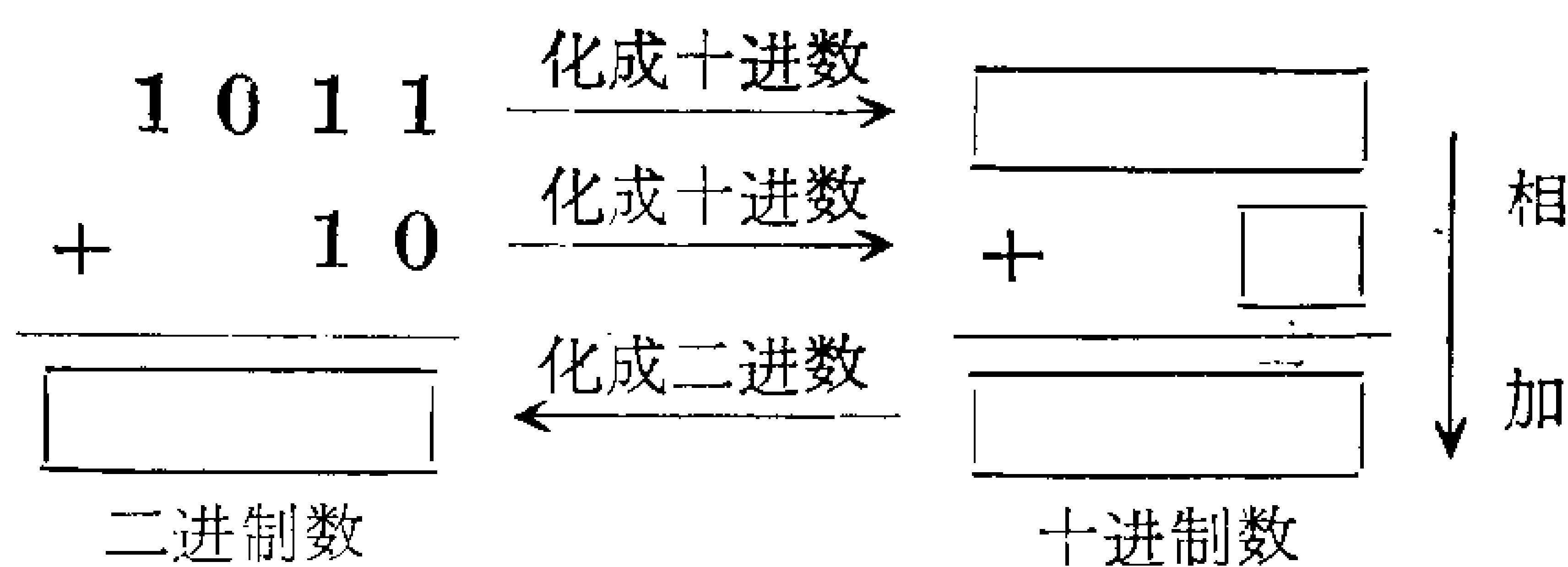
多位的二进制数怎么相加呢？大家知道，多位的十进制数的加法法则是：各位对齐，从个位加起，逢十进一。这就启发我们这样猜测：多位的二进制数相加，也许可以各位对齐，从第一位加起，但要逢二进一。例如：

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 1 \\
+\quad\ \ 1\ 0 \\
\hline
1\ 1\ 0\ 1
\end{array}
$$

↑ ↑ 逢二进一

这样的猜测是不是正确？我们先用零件包装来说明。$1011_{(二)}$ 可代表零件 1 箱零 1 袋 1 只，加上 $10_{(二)}$ 是 1 袋，结果是 1 箱零 2 袋 1 只。而 2 袋可以装成 1 盒，正好与 $1101_{(二)}$ 符合。从常识上来讲，这样的计算结果是正确的。下面我们再化成十进制数来验证。

问题 2 请你完成下面的计算，来验证上面的关于多位二进制数加法法则的猜测的正确性：



问题 3 做下面的加法，并用十进制数来验证结果是否正确？

```
   110     1101     111     1011
+ 1101   + 1011   +   1   + 1011
------   ------   -----   ------
```

通过练习，我们可以得出结论：上面所猜测的法则是正确的，合理的（严格地说，其正确性要经过理论证明，这里我们不证了）。即在做多位二进制数加法时，可用竖式将加数的数位对齐，用二进制数加法的四条基本法则将各位数字相加，数字和满 2 时向上一位进 1。可以说，除了"逢二进一"这一条外，其余与做十进制数的加法完全一样。

问题 4 做几个更复杂的二进制数加法：

```
               11111          1
   101101       1111         11
    11011        111        101
    10001         11        111
+  101011   +      1     + 1001
---------   ---------    ------
```

在电子计算机里，二进制数可以用一排具备两种状态的元件来代表，并且用这些电子元件组成一定的线路，就能形成一个加法器。在电子计算机中就是用这样的加法器来进行加法运算的。

问题解答

问题 1

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

问题 2

二进制数		十进制数
1011	⟶	11
+ 10	⟶	+ 2
1101	⟵	13

问题 3

二进制数		十进制数
110	⟶	6
+ 1101	⟶	+ 13
10011		19

$$\begin{array}{r} 1101 \\ +\quad 1011 \\ \hline 11000 \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{r} 13 \\ +\ 11 \\ \hline 24 \end{array}$$

二进制数　　　　十进制数

$$\begin{array}{r} 111 \\ +\quad 1 \\ \hline 1000 \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{r} 7 \\ +\ 1 \\ \hline 8 \end{array}$$

二进制数　　　　十进制数

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +\quad 1011 \\ \hline 10110 \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ \hline 22 \end{array}$$

二进制数　　　　十进制数

问题4

$$\begin{array}{r} 101101 \\ 11011 \\ 10001 \\ +\quad 101011 \\ \hline 10000100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111 \\ 1111 \\ 111 \\ 11 \\ +\quad 1 \\ \hline 111001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ 101 \\ 111 \\ +\ 1001 \\ \hline 11001 \end{array}$$

省去了“九九表”的乘法

当学习乘法时，老师曾要求我们把乘法口诀，也就是“九九表”背得滚瓜烂熟，这化费了大家不少的精力。相比之下，二进制数的乘法就十分简易了。

我们首先来研究二进制数的乘法口诀。二进制数只有两个数码，因此，它的乘法口诀只涉及四种情况：

$$0\times0,\ 0\times1,\ 1\times0,\ 1\times1.$$

仿照十进制数的乘法口诀，可得

$$0\times0=0,\ 0\times1=0,\ 1\times0=0,\ 1\times1=1.$$

在二进制数中，它们是否正确呢？

我们可以利用一下十进制数作过渡，来验证它的正确性。

问题1 完成下列计算：

二进制数		十进制数
0	化成十进制数 →	□
× 1	化成十进制数 →	× □
□	← 化成二进制数	□（↓ 作乘法）

就是 $0_{(二)}\times1_{(二)}=(\quad)_{(二)}$.

问题 2　用类似的方法，做下列乘法：

$$0_{(二)}\times 0_{(二)}=(\quad)_{(二)},$$

$$1_{(二)}\times 0_{(二)}=(\quad)_{(二)},$$

$$1_{(二)}\times 1_{(二)}=(\quad)_{(二)}.$$

因此，我们可以说，上面四句二进制数的乘法口诀是正确的，可以归纳如下表：

×	0	1
0	0	0
1	0	1

那么，多位二进制数的乘法该怎么做呢？我们也仿照多位十进制数的直式乘法法则，利用二进制数的乘法口诀来计算。例如：

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0 \\ \times\quad\;\; 0 \\ \hline 0\,0\,0 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} 1\,1\,0 \\ \times\quad\;\; 1 \\ \hline 1\,1\,0 \end{array}$$

这样做是否正确？请你用化成十进制数的方法来检验一下。

问题 3　(1) 计算：

$111\times 0=?$　$1001\times 0=?$　$101111\times 0=?$

(2) 计算：

$$111\times1=?\quad 1001\times1=?\quad 101111\times1=?$$

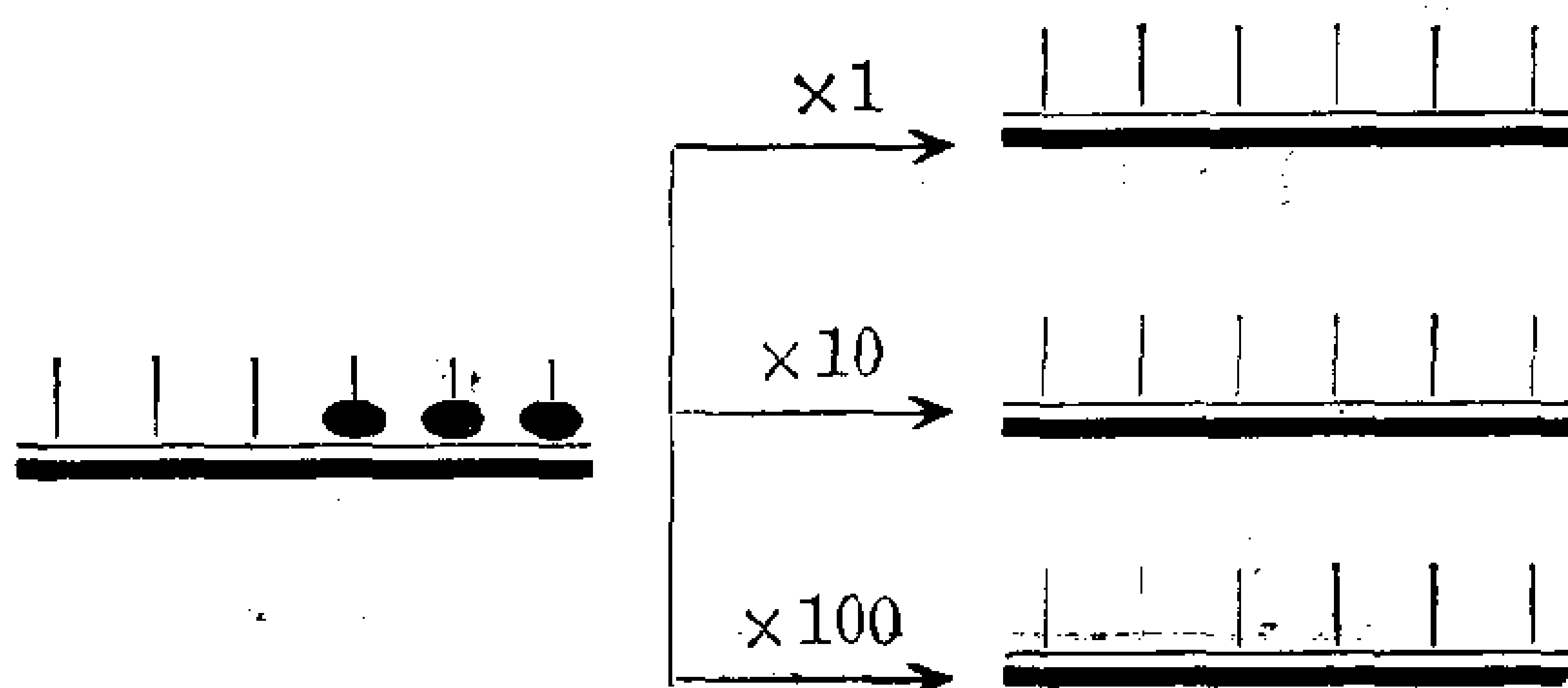
(3) 现在你能否说出，任意一个多位二进制数乘以 0 和乘以 1 的结果是什么吗？

(4) $111\times10=?\qquad 1001\times10=?$

$$111\times100=?\qquad 1001\times100=?$$

(5) 你能否看出，一个多位二进制数乘以 10, 100, 它有些什么规律？

问题 4 将下列二进计数器上的数分别乘以 1, 10 和 100。



你得到什么结论？

下面我们再来看两个二进制多位数相乘的情况：

$$\begin{aligned}111\times110&=111\times(100+10)\\&=111\times100+111\times10\\&=11100+1110=101010.\end{aligned}$$

写成竖式是：

```
      1 1 1
×     1 1 0
───────────
    1 1 1 0 ──→ 这就是111×10（移了一位）
+ 1 1 1     ──→ 这就是111×100（移了二位）
───────────
  1 0 1 0 1 0 ──→ 这就是111×100+111×10之和
```

问题5 做下列乘法：

```
   1001        1101        1010
×    11     ×   111     ×   111
───────     ───────     ───────

   1001        1010        1111
×   101     ×   110     × 1010
───────     ───────     ───────
```

问题6 在下列空格中填入0或1：

```
          1  1  □  1
×            □  0  1
────────────────────
          □  □  1  1
    1  □  1  1  □
────────────────────
 1  □  0  1  0  □  1
```

于是，关于二进制多位数乘法，我们可以得出如下结论：

1．任何数乘以1，就是原数照抄，乘以10，100，……对二进计数器来说只需要移位就行了；对于数的表达式子来说，只需要在末尾添0就行了。

2. 一个多位数乘以另一个多位数，可以仿照多位十进制数的直式乘法来做。实际上，就是这个多位数乘以形如 1, 10, 100, 1000, …… 中的某几个数的和，即乘法可以分解为移位和加法两个动作。

正由于二进制数的乘法有以上一些特点，因此在电子计算机里乘法可以由移位器和加法器来完成。

问题解答

问题 1

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \times\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \qquad 0_{(二)} \times 1_{(二)} = 0_{(二)}$$

二进制数　　十进制数

问题 2

$$\begin{array}{r} 0 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad 0_{(二)} \times 0_{(二)} = 0_{(二)}$$

二进制数　　十进制数

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad 1_{(二)} \times 0_{(二)} = 0_{(二)}$$

二进制数　　十进制数

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad 1_{(二)} \times 1_{(二)} = 1_{(二)}$$

二进制数　　十进制数

问题 3 (1) $111\times0=0$, $1001\times0=0$, $101111\times0=0$.

(2) $111\times1=111$, $1001\times1=1001$, $101111\times1=101111$.

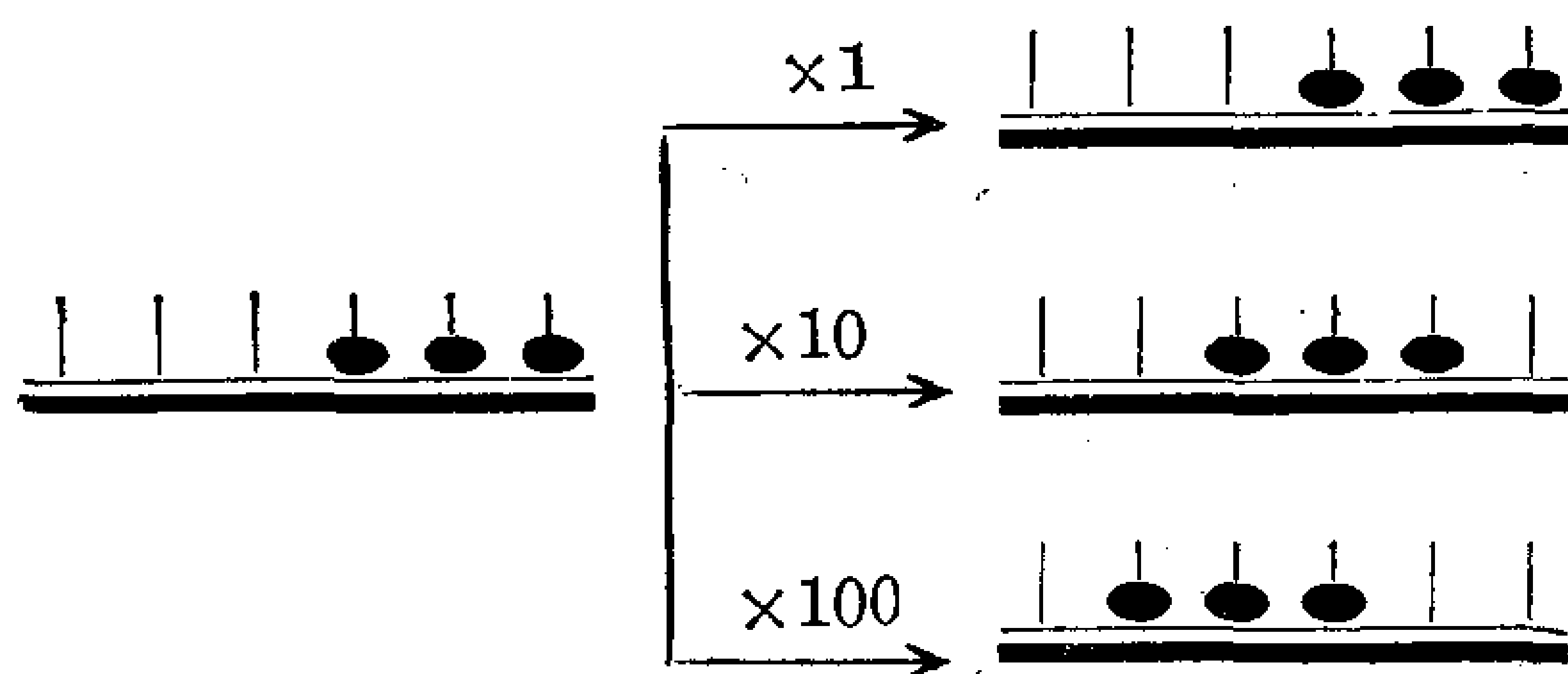
(3) 任意一个多位二进制数乘以 0 得 0, 乘以 1 得原数.

(4) $111\times10=1110$, $1001\times10=10010$,

$111\times100=11100$, $1001\times100=100100$.

(5) 一个多位二进制数乘以 10, 只要在被乘数的末尾添一个 0 就可以了; 乘以 100, 只要添两个 0 就可以了.

问题 4



在二进计数器上, 一个多位二进制数乘以 1, 10, 100, …… 就是将该数左移 1 位, 2 位, 3 位, ……

问题 5

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,0\,1 \\
\times\qquad 1\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,1 \\
1\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,1\,0\,1\,1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\,1\,0\,1 \\
\times\qquad 1\,1\,1 \\
\hline
1\,1\,0\,1 \\
1\,1\,0\,1 \\
1\,1\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,1\,1\,0\,1\,1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1010 \\
\times \quad 111 \\
\hline
1010 \\
1010 \\
1010 \\
\hline
1000110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1001 \\
\times \quad 101 \\
\hline
1001 \\
1001 \\
\hline
101101
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1010 \\
\times \quad 110 \\
\hline
10100 \\
1010 \\
\hline
111100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1111 \\
\times \quad 1010 \\
\hline
11110 \\
11110 \\
\hline
10010110
\end{array}
$$

问题6

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & & & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\
\times & & & & \boxed{1} & 0 & 1 \\
\hline
 & & & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \\
 & & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & \boxed{0} & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 1
\end{array}
$$

10－1＝1——二进制数的减法

我们知道，减法是加法的逆运算。

问题1 从第52页上二进制数加法表，你能不能计算下列二进制数的差？

$$0-0=? \quad 1-0=?$$

$$1-1=? \quad 10-1=?$$

请你特别注意10－1。当某一位上出现不够减的情况时，如同十进制数一样，要借位。借一当几？借一当10（注意，这是二进制数的10，相当于十进制数的2）。

不难知道，二进制数减法的基本法则是：

$$0-0=0, \quad 1-0=1,$$

$$1-1=0, \quad 10-1=1.$$

问题2 做下列减法，并请你总结一下多位二进制数减法的法则。

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ \ 10 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ -\ 1011 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11110 \\ -\ \ 1001 \\ \hline \end{array}$$

问题3 做下列较难的减法：

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\quad 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ -\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100010 \\ -\quad 101 \\ \hline \end{array}$$

在十进制数的减法中，有一种"减整加补"的方法。例如对于 15－8，可以这样想：先在 15 中减去 10（减整*），成 5，然后考虑到减得太多了，要补上 2（加补），得 7。

这个 2 叫做 8 的补数，它是由 10 减 8 得来的。

补数的概念可以推广到多位数去，如 89 的补数可以看作是 100－89＝11，370 的补数可以看作是

$$1000-370=630.$$

这样，123－89 可以看作：

$$\begin{aligned}123-89&=123-100+11\\&=123+11-100\\&=34.\end{aligned}$$

1200－370 可以看作：

$$\begin{aligned}1200-370&=1200-1000+630\\&=1200+630-1000=830.\end{aligned}$$

用"减整加补"的方法来做减法，我们在一些介绍

* 这里的"整"，不是通常所说的整数，而是指 10 的整数次幂。

速算的书里是看到过的。我们知道，在通常的减法里常常会碰到借位，而用“减整加补”的方法，可以免去借位。在计算上面的几个例子时，你借过位吗？

下面这类问题情况有点不同。

$$1023-89=?$$

如果这样做：

$$\begin{aligned}1023-89&=1023-100+11\\&=1023+11-100\\&=1034-100.\end{aligned}$$

继续做下去，仍要借位。为了免去借位，要把 89 的补数看作 $1000-89=911$。这样就有：

$$\begin{aligned}1023-89&=1023-1000+911\\&=1023+911-1000\\&=1934-1000\\&=934.\end{aligned}$$

自然会产生这样的问题，可不可以利用“减整加补”的方法来做二进制数的减法呢？为此，也要引进“二进补数”的概念。所谓一个二进制数的补数，就是形如 $10_{(二)}$，$100_{(二)}$，$1000_{(二)}$，…… 的数减去这个数的差。

问题 4 求下列二进制数的补数：

(1) 1，　　(2) 11，

(3) 101，　　(4) 1001，

(5) 10100，　　(6) 10010000。

你能摸索出求二进补数的规律吗？

求二进补数的规律是：

将原数中的0换成1，1换成0，变换后所得的数再加1。

如求 $1101011100_{(二)}$ 的补数。先变换成0010100011，然后加1，得10100100。

问题5 求 $11_{(二)}$，$111000_{(二)}$，$110001000_{(二)}$ 的补数。

下面我们就可以利用"减整加补"的方法来做二进制数的减法了。

$$110-11=?$$

11的补数是 $100-11=1$，减整加补：

$$110-100+1=11.$$

为了不使出现类似于上面 $1023-89$ 仍要借位的情况，一般地，我们可以这样来进行减整加补：先用添0的方法，使减数与被减数的位数相同，如上例中把11写成011，然后求出这个数的补数，得101，再减整加补：

$$\begin{array}{r} 110 \\ +\ 101 \\ \hline \boxed{1}011 \end{array}$$

↑减去1000，即舍去最高位上的1，得11.

又如 $1001-11=?$

先求0011的补数，得1101。再减整加补：

$$
\begin{array}{r}
1001 \\
+\ 1101 \\
\hline
\boxed{1}\,0110
\end{array}
$$

→ 舍去这个1，得110.

$\therefore$ $1001-11=110$.

(如果把减数11的补数当作1，能避免借位吗?)

问题6 利用"减整加补"做下列减法：

(1) $101-11$，　　(2) $1100-1010$，

(3) $11101-110$.

小结一下利用"减整加补"做减法的步骤。

第一步，如果减数的位数小于被减数的位数，应在减数的前面补0，使减数的位数与被减数的位数相同。

第二步，求减数的补数。方法是将减数里1换成0，0换成1，在换毕后加上1。

第三步，将被减数加上减数的补数。

第四步，舍去上面所得和里的最高位上的1。

在电子计算机里，每一个二进制数都给以一定的位数，即它们的位数都是固定的。如果我们假定某一台电子计算机每一个二进制数都是八位。那么，譬如二进制数1001就应看作00001001，11就应看作00000011。

减式$1001-11$，应看作$00001001-00000011$，减数00000011的补数是11111101。

$$
\begin{array}{r}
00001001 \\
+\quad 11111101 \\
\hline
\boxed{1}\ 00000110
\end{array}
$$

舍去这个1(自动消失)

因为电子计算机里每一个二进制数只有八位(我们假定的)，所以，第九位上的这个"1"自动消失。这样"减整加补"实质上只需"加补"就可以了。

"加补"就是做加法。因此，电子计算机里不必另外设计一套做减法的专门设备，只要利用加法器就行了。可见，用"减整加补"做减法，对电子计算机来说既节省了机器的设备，又提高了功效，多么方便而迅速啊！

问题 7 假想在一台电子计算机上做下列二进制数的减法(每个二进制数都看作八位的)：

(1) 1101－1011，(2) 1100－1010，

(3) 1000－10，(4) 11101－110.

问 题 解 答

问题 1 0－0＝0，1－0＝1，1－1＝0，10－1＝1.

问题 2

$$
\begin{array}{r}
100 \\
-\quad 10 \\
\hline
10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1101 \\
-1011 \\
\hline
10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
11110 \\
-\quad 1001 \\
\hline
10101
\end{array}
$$

多位二进制数的减法的法则应是：将被减数与减数的各位数字对齐，然后各位数字相减．某位不够减，从高位上借一当$10_{(二)}$.

问题 3

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\quad 1 \\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ -\quad 1 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100010 \\ -\quad 101 \\ \hline 11101 \end{array}$$

问题 4 (1) 1, (2) 1, (3) 11,
(4) 111, (5) 1100, (6) 1110000.

问题 5 1; 1000; 1111000.

问题 6 (1)

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 101 \\ \hline \boxed{1}010 \end{array}$$

1 →舍去

$\therefore \quad 101-11=10.$

(2)

$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 0110 \\ \hline \boxed{1}0010 \end{array}$$

1 →舍去

$\therefore \quad 1100-1010=10.$

(3)

$$\begin{array}{r} 11101 \\ +\ 11010 \\ \hline \boxed{1}10111 \end{array}$$

1 →舍去

$\therefore \quad 11101-110=10111.$

问题 7

(1)

$$\begin{array}{r} 00001101 \\ +\ 11110101 \\ \hline \boxed{1}00000010 \end{array}$$

1 →自动消失

$\therefore \quad 1101-1011=10.$

(2)

$$
\begin{array}{r}
0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\
+\quad 1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0 \\
\hline
\boxed{1}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0
\end{array}
$$

$\boxed{1}$ ——→ 自动消失

$\therefore\quad 1100-1010=10.$

(3)

$$
\begin{array}{r}
0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\
+\quad 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0 \\
\hline
\boxed{1}\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0
\end{array}
$$

$\boxed{1}$ ——→ 自动消失

$\therefore\quad 1000-10=110.$

(4)

$$
\begin{array}{r}
0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1 \\
+\quad 1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
\boxed{1}\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1
\end{array}
$$

$\boxed{1}$ ——→ 自动消失

$\therefore\quad 11101-110=10111.$

不用试商的除法

算术四则运算中最困难的当然是除法。即使是数学家，要计算一道象 $1573373 \div 967841$ 这样的多位数除法，也不是那么轻而易举的。而二进制数的除法差不多同乘法一样简易。

我们可以模仿十进制数除法的法则，做二进制数的除法。

问题1 模仿十进制数直式除法法则计算：

$$1111_{(二)} \div 11_{(二)}.$$

再将被除数和除数都化为十进制数，做对应的除法，以此来检验上面的计算结果是否正确。

可以知道，这样计算的结果是正确的。

另外，因为除法可以看作是乘法的逆运算，所以也可用乘法来检验除法运算的正确性。

问题2 用二进制数的乘法来验证问题1的计算结果的正确性。

可以看出，十进制数除法的基本方法，完全适用于二进制数的除法。十进制数除法中，最难的一步要算试商了，但在二进制数除法里，试商却是如此的简易：

要么是 0，要么是 1。因此计算就大大地简化了。

下面两个例子，不需要任何解释，大家都能看懂。

```
      1001                 111
 11)11011          111)110001
    11                 111
    -----              ------
       11              1010
       11               111
    -----              ------
       —                 111
                         111
                       ------
                          —
```

问题 3　做下列除法：

$$10\overline{)1000} \qquad 111\overline{)100011}$$

我们还可以用另一种方法来做除法。大家都知道，除法可以看成是连续减去相同数的缩简了的减法。例如在十进制数中，算式 $80\div10$，意味着问：80 里包含了几个 10？所以可以在 80 中一次又一次地减去 10。因为减了 8 次恰巧减完，那么次数 8，便是 $80\div10$ 的商。在手摇计算机里，除法就是这样进行的。

二进制数的除法也可以这样做。

问题 4　(1) 1110 连续减去 111，减了几次恰巧减完？并将所减的次数（十进制数）化为二进制数。

(2) 用前面的直式除法做：$1110\div111$。

(1)，(2) 的结果是否一样？

除法可以用连续减来代替，由前面我们已经知道，利用补数，减法又可以由加法来实现。请看下面的

问题 5 用连续减的方法来完成下列除法（减法用减整加补的方法来做）：10010÷110。

问题 6 用连续减的方法来完成下列除法（减法用减整加补的方法来做）：

(1) 1001÷11， (2) 11001÷101。

在电子计算机里，由于每个二进制数的位数是固定的，所以在计算上面的问题时，与笔算有点不同。

问题 7 假想在电子计算机里做问题 5 里的除法（假设每个二进制数都是 8 位的）。

到此为止，我们学习了二进制数的四则运算。可以看出，二进制数的四则运算，比起十进制数来要简便得多，而且减、乘和除法运算，都可以转化为加法来实现。这就意味着，在电子计算机里，主要用加法器（再配以一些其他的设备，如移位器）就可以进行四则运算，这样，就使设备大大地简化了。

问题解答

问题 1

```
       1 0 1
 11 ) 1 1 1 1
      1 1
      -------
          1 1
          1 1
      -------
           —
```

化成十进制数验证：

$$\begin{array}{ccccc} 1111_{(二)} & \div & 11_{(二)} & = & 101_{(二)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 15_{(十)} & \div & 3_{(十)} & = & 5_{(十)} \end{array}$$

问题 2　用乘法验证：

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times \quad 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

问题 3

$$10\overline{)1000} = 100, \quad \begin{array}{r} 1000 \\ \hline — \end{array}$$

$$111\overline{)100011} = 101, \quad \begin{array}{r} 100011 \\ 111 \\ \hline 111 \\ 111 \\ \hline — \end{array}$$

问题 4　(1)

$$\begin{array}{r} 1110 \\ - \quad 111 \\ \hline 111 \\ - \quad 111 \\ \hline 0 \end{array}$$

减了 2 次恰巧减完．次数 $2_{(十)}=10_{(二)}$．

(2)

$$111\overline{)1110} = 10, \quad \begin{array}{r} 1110 \\ 1110 \\ \hline — \end{array}$$

结果完全一样．

问题5 把几次连续减的直式简缩成下式:

$$\begin{array}{lrl}
 & \phantom{\boxed{1}}\ 1\,0\,0\,1\,0 & \\
 & +\quad 1\,1\,0\,1\,0 & \text{——110 的补数} \\ \hline
\text{舍去——} & \boxed{1}\ 0\,1\,1\,0\,0 & \text{----第一次减去 110 的差} \\
 & +\quad 1\,1\,0\,1\,0 & \\ \hline
\text{舍去——} & \boxed{1}\ 0\,0\,1\,1\,0 & \text{——第二次减去 110 的差} \\
 & +\quad 1\,1\,0\,1\,0 & \\ \hline
\text{舍去——} & \boxed{1}\ 0\,0\,0\,0\,0 & \text{——第三次减去 110, 减尽}
\end{array}$$

即 10010 中有 $3_{(十)}$ 个 110, 而 $3_{(十)}=11_{(二)}$,

$$\therefore\quad 10010\div110=11.$$

问题6 (1)

$$\begin{array}{rl}
\phantom{\boxed{1}}\ 1\,0\,0\,1 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1 & \longrightarrow \text{11 的补数} \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,1\,1\,0 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,0\,1\,1 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,0\,0\,0 &
\end{array}$$

减了 $3_{(十)}$ 次恰巧减尽, 而 $3_{(十)}=11_{(二)}$,

$$\therefore\quad 1001\div11=11.$$

(2)

$$\begin{array}{rl}
\phantom{\boxed{1}}\ 1\,1\,0\,0\,1 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1\,1 & \longrightarrow \text{101 的补数} \\ \hline
\boxed{1}\ 1\,0\,1\,0\,0 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,1\,1\,1\,1 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,1\,0\,1\,0 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,0\,1\,0\,1 & \\
+\quad 1\,1\,0\,1\,1 & \\ \hline
\boxed{1}\ 0\,0\,0\,0\,0 & \quad\cdots
\end{array}$$

减了$5_{(十)}$次恰巧减尽，而$5_{(十)}=101_{(二)}$，

$$\therefore \quad 11001 \div 101 = 101.$$

问题 7

$$
\begin{array}{r}
0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
+ \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
\hline
\boxed{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
+ \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
\hline
\boxed{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
+ \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
\hline
\boxed{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
\end{array}
$$

减了$3_{(十)}$次恰巧减尽，而$3_{(十)}=11_{(二)}$，

$$\therefore \quad 10010 \div 110 = 11.$$

二进小数

十进制数里，不但有整数，还有小数。二进制数里，也有小数。

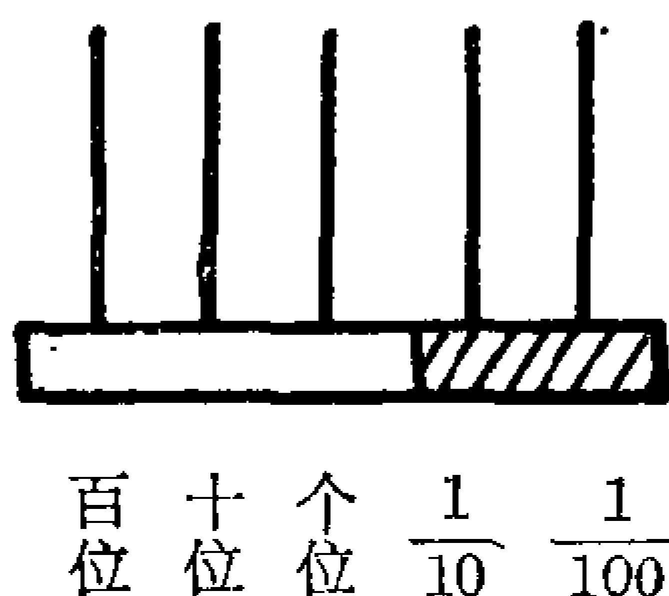
先回忆一下：在十进制数里，小数的意义是怎样的？譬如 0.1, 0.12 表示什么呢？

象 0.1, 0.12 这样的有限小数，实际上是以 10, 100, 1000, …… 为分母的分数的特别记法。

$\frac{1}{10}$ 可以记为 0.1, $\frac{12}{100}$ 可以记为 0.12。

小数也可以在计数器上表示出来。

在十进计数器的个位柱的右边，附加几根柱子，涂以颜色，以示区别。

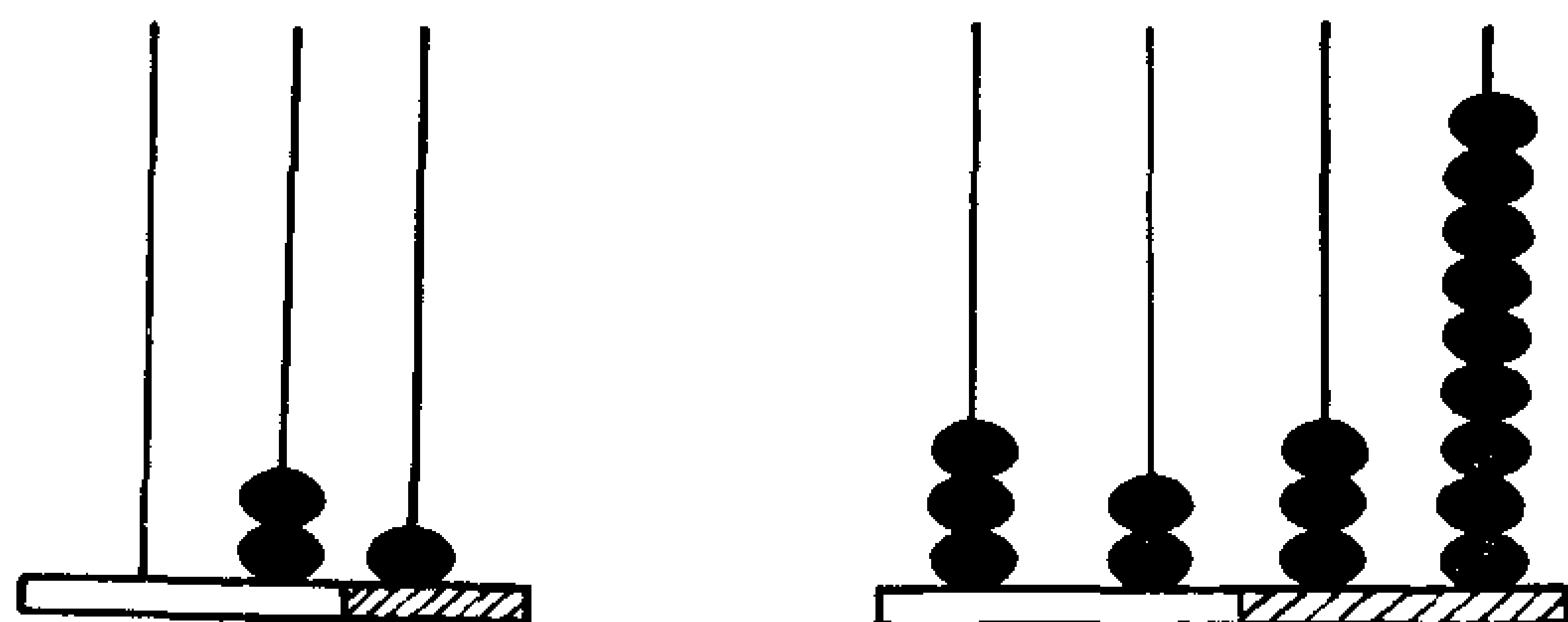


百位 十位 个位 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$

这些柱子分别代表 $\frac{1}{10}$ 位，$\frac{1}{100}$ 位，…… 它们上的一颗珠儿，分别代表 0.1, 0.01, ……就是说，每一根

柱上的十颗珠儿仍代表前一根柱上的一颗珠儿。

问题 1 下列珠图表示怎样的十进小数？



对二进计数器也作类似的改造。在第一位右边添一根附加柱。附加柱上的每一颗珠代表半个单位，就是说附加柱上的两颗珠代表第一位上的一颗珠。

问题 2 下列珠图表示怎样的二进小数？

添加更多的附加柱，可以表示多位的二进小数。注意，每一根附加柱上的一颗珠儿代表它左边的一根柱上一颗珠儿的一半。

问题 3 下列珠图表示怎样的二进小数？

问题 4 (1) 如果个位上的一颗珠表示 1 斤，那末第一根附加柱上的一颗珠表示多少斤？第二、三根附加柱上的一颗珠表示多少斤？

(2) 利用(1)的结论，将二进小数化为十进小数：

$0.1_{(二)} \rightarrow$ [abacus diagram] $\rightarrow \frac{1}{2}_{(十)}$

$0.01_{(二)} \rightarrow$ [abacus diagram] $\rightarrow ?_{(十)}$

$0.001_{(二)} \rightarrow$ [abacus diagram] $\rightarrow$

(3) 填写下列的表

二进制数	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	……
十进制数	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$			

有了这张表，就很容易将二进小数化为十进小数。例如，$0.11_{(二)}$ 可以看作1个 $\frac{1}{2}$ 与1个 $\frac{1}{4}$ 相加，即

$$0.11_{(二)}=\left(1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}\right)_{(十)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)_{(十)}$$
$$=0.75_{(十)}.$$

再如 $0.101_{(二)}$ 可以看作1个 $\frac{1}{2}$ 与一个 $\frac{1}{8}$ 相加，即

$$0.101_{(二)}=\left(1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}\right)_{(十)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)_{(十)}=0.625_{(十)}.$$

问题5 将下列二进小数化为十进小数：

(1) $0.111_{(二)}$， (2) $0.011_{(二)}$， (3) $0.001_{(二)}$，

(4) $0.0101_{(二)}$。

十进小数化为二进小数可用"乘二取整"的办法：(你能思考一下它的道理吗？)

如将 $0.375_{(十)}$ 化为二进小数。

$0.375\times2=\mathbf{0}.75$——整数部分为 0（即二进制小数的第一位上为 0)，余下 0.75；

$0.75\times2=\mathbf{1}.5$——整数部分为 1（即二进制小数的第二位上为 1)，余下 0.5；

$0.5\times2=\mathbf{1}$——整数部分为 1（即二进制小数的第三位上为 1)，无余。

$$\therefore\quad 0.375_{(十)}=0.011_{(二)}$$

可简记成如下直式：

$$\begin{array}{r}
0.375\\
\times\quad\ \ 2\\
\hline
\mathbf{0}.750\\
\times\quad\ 2\\
\hline
\mathbf{1}.50\\
\times\ \ 2\\
\hline
\mathbf{1}.0
\end{array}$$

问题 6 用简记的直式将下列十进制小数化为二进小数：

(1) $0.125_{(十)}$，(2) $0.625_{(十)}$，(3) $0.875_{(十)}$。

二进小数的四则运算是很容易的，我们只举几个

例子来说明。

加法：例如

$$\begin{array}{r} 1101.001 \\ +\quad 110.01 \\ \hline 10011.011 \end{array}$$

问题 7 计算：

(1) $0.101+0.11$， (2) $1010.10+101.0101$。

乘法：例如

$$\begin{array}{r} 110.11 \\ \times\quad 10.1 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ \hline 10000.111 \end{array}$$

问题 8 计算：

(1) 1100.1×10.01， (2) 0.1111×0.1111。

减法：例如

$$\begin{array}{r} 1101.001 \\ -\quad 110.01 \\ \hline 110.111 \end{array}$$

问题 9 计算：

(1) $11011.11-100.11$， (2) $1-0.1111$。

除法：例如

```
             1 0.1
11001 ) 1 1 1 1 1 0.1
        1 1 0 0 1
        ---------------
            1 1 0 0 1
            1 1 0 0 1
            ---------
```

对于除数是小数的除法，可以通过扩大同样倍数的方法，把除数化为整数。如

$$1101.001 \div 110.01 = 110100.1 \div 11001.$$

问题 **10** 计算：

(1) $1.001 \div 11$，　　(2) $11.11 \div 10.1$。

问题解答

问题 **1**　2.1，32.39。

问题 **2**　1.1，1.0，10.1。

问题 **3**　0.11，1.01，11.10。

问题 **4**　(1) 第一根附加柱上的一颗珠表示半斤；第二根附加柱上的一颗珠表示 $\frac{1}{4}$ 斤；第三根附加柱上的一颗珠表示 $\frac{1}{8}$ 斤。

(2) $0.1_{(二)} \longrightarrow$　　$\longrightarrow \frac{1}{2}_{(十)}$

$0.01_{(二)} \longrightarrow$　　$\longrightarrow \frac{1}{4}_{(十)}$

$0.001_{(二)} \longrightarrow$ [abacus diagram] $\longrightarrow \frac{1}{8}_{(十)}$

(3)

二进制数	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	……
十进制数	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	……

问题5 (1) $0.111_{(二)}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)_{(十)}=\frac{7}{8}_{(十)}$.

(2) $0.011_{(二)}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)_{(十)}=\frac{3}{8}_{(十)}$.

(3) $0.001_{(二)}=\frac{1}{8}_{(十)}$.

(4) $0.0101_{(二)}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)_{(十)}=\frac{5}{16}_{(十)}$.

问题6 (1)

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{0}.250 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{0}.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.0 \end{array}$$

$\therefore\ 0.125_{(十)}=0.001_{(二)}$.

(2)

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.250 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{0}.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.0 \end{array}$$

$\therefore\ 0.625_{(十)}=0.101_{(二)}$.

(3)

$$\begin{array}{r} 0.875 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.750 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline \mathbf{1}.0 \end{array}$$

$\therefore\ 0.875_{(十)}=0.111_{(二)}$.

问题 7

(1)
$$\begin{array}{r} 0.101 \\ +\ 0.11 \\ \hline 1.011 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1010.10 \\ +\ 101.0101 \\ \hline 1111.1101 \end{array}$$

问题 8

(1)
$$\begin{array}{r} 1100.1 \\ \times\quad 10.01 \\ \hline 11001 \\ 1100100 \\ \hline 11100.001 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 0.1111 \\ \times\quad 0.1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 0.11100001 \end{array}$$

问题 9

(1)
$$\begin{array}{r} 11011.11 \\ -\quad 100.11 \\ \hline 10111.00 \end{array}$$

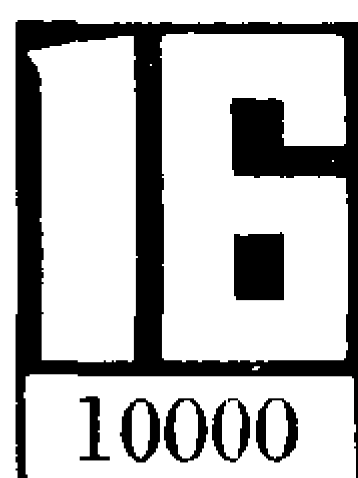
(2)
$$\begin{array}{r} 1 \\ -\ 0.1111 \\ \hline 0.0001 \end{array}$$

问题 10

(1)
$$\begin{array}{r} 0.011 \\ 11\overline{)1.001} \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline \end{array}$$

(2) $11.11 \div 10.1 = 111.1 \div 101 = 1.1$

$$\begin{array}{r} 1.1 \\ 101\overline{)111.1} \\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline \end{array}$$



二进制编码的十进制（十-二进制）

在"使机器认识数"一节里，我们已经知道，一般可以用穿孔的纸带把数据告诉机器。那么，更大的一些数据，如$145_{(十)}$，$1023_{(十)}$在纸带上怎么穿孔呢？

我们知道

$$145_{(十)}=10010001_{(二)},$$

$$1023_{(十)}=1111111111_{(二)},$$

就是说，它们化成的二进制数分别有8位和10位。这样就产生了一个问题：穿孔纸带的宽度无法统一了。

为此，人们不直接将二进制数告诉电子计算机，而创造一种叫做"十-二进制"，将十进制数先化作"十-二进制"告诉机器，再由机器自动翻译成二进制数，参加运算。

"十-二进制"是怎样的呢？

我们知道，十进制数的十个数码都可以化成一个二进制数，我们把每个数都补足四位，就是：

十进制数码	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
化为二进制	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

将一个十进制数写成十-二进制，只需将十进制数的每一位数字都化作四位的二进制数，然后依原数目次序，将这个二进制数排成一行就可以了。

譬如，将 $145_{(十)}$ 写成十-二进制数，由

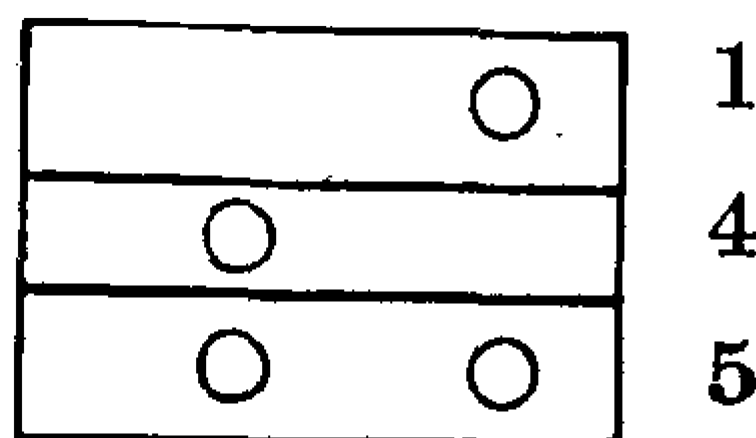
$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0001 & 0100 & 0101 \end{array}$$

可以写出

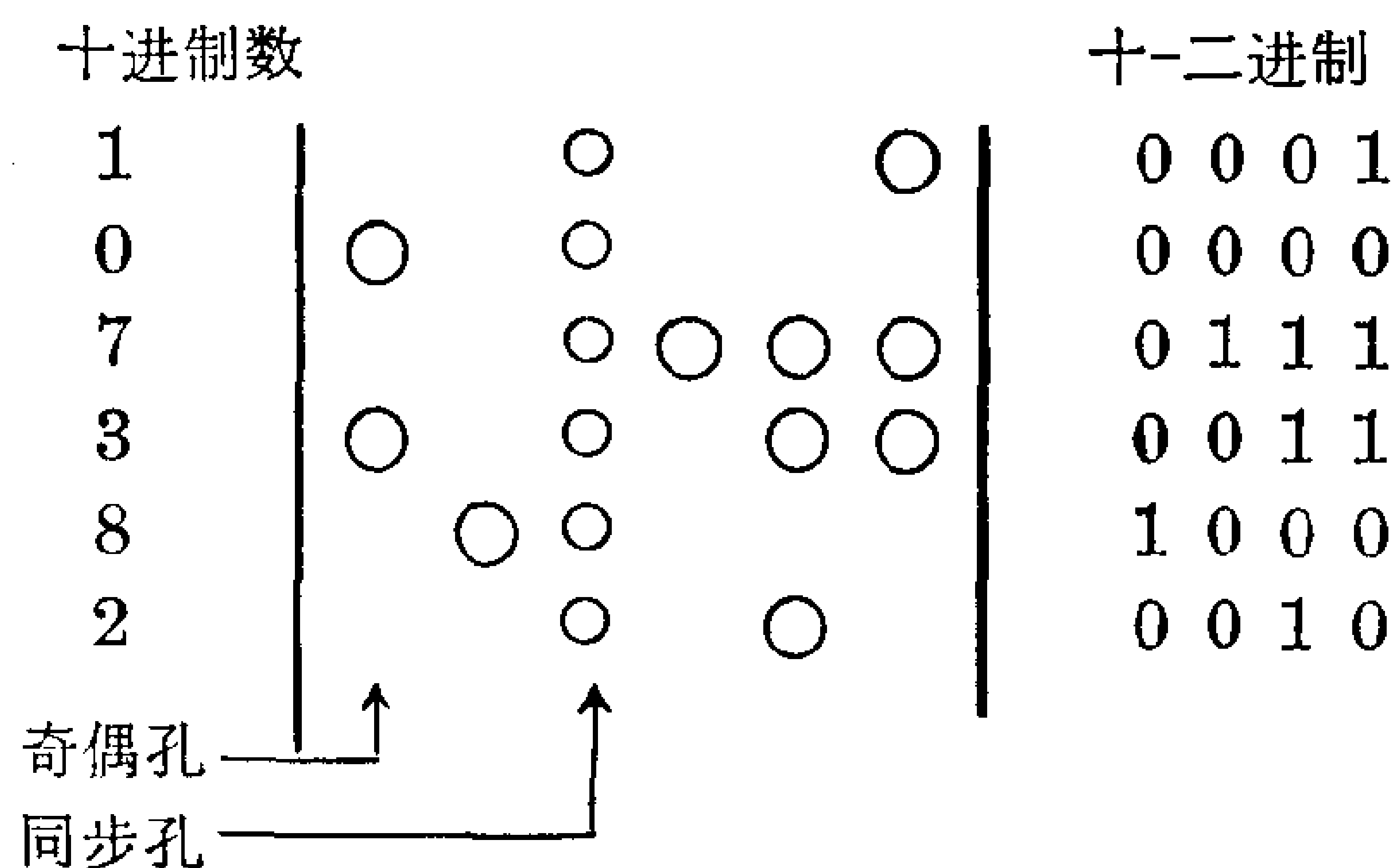
$$145_{(十)}=000101000101_{(十\text{-}二)}.$$

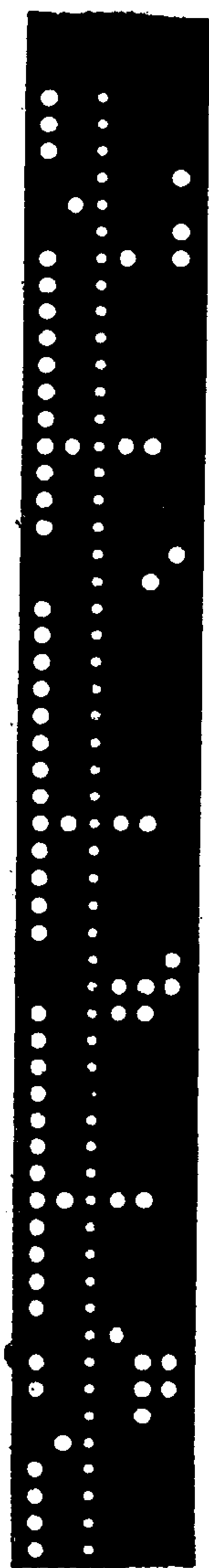
问题1 试将 $1023_{(十)}$ 写成十-二进制。

这样，如果按照十-二进制数在纸带上穿孔，纸带的宽只需四个位置就行了。数字位数多的，只是在纸带上多占用几行，不需要增加纸带的宽度。如 $145_{(十)}$ 在纸带上就如右图所示。



实际使用的纸带如下图（图中表示 $107382_{(十)}$）。





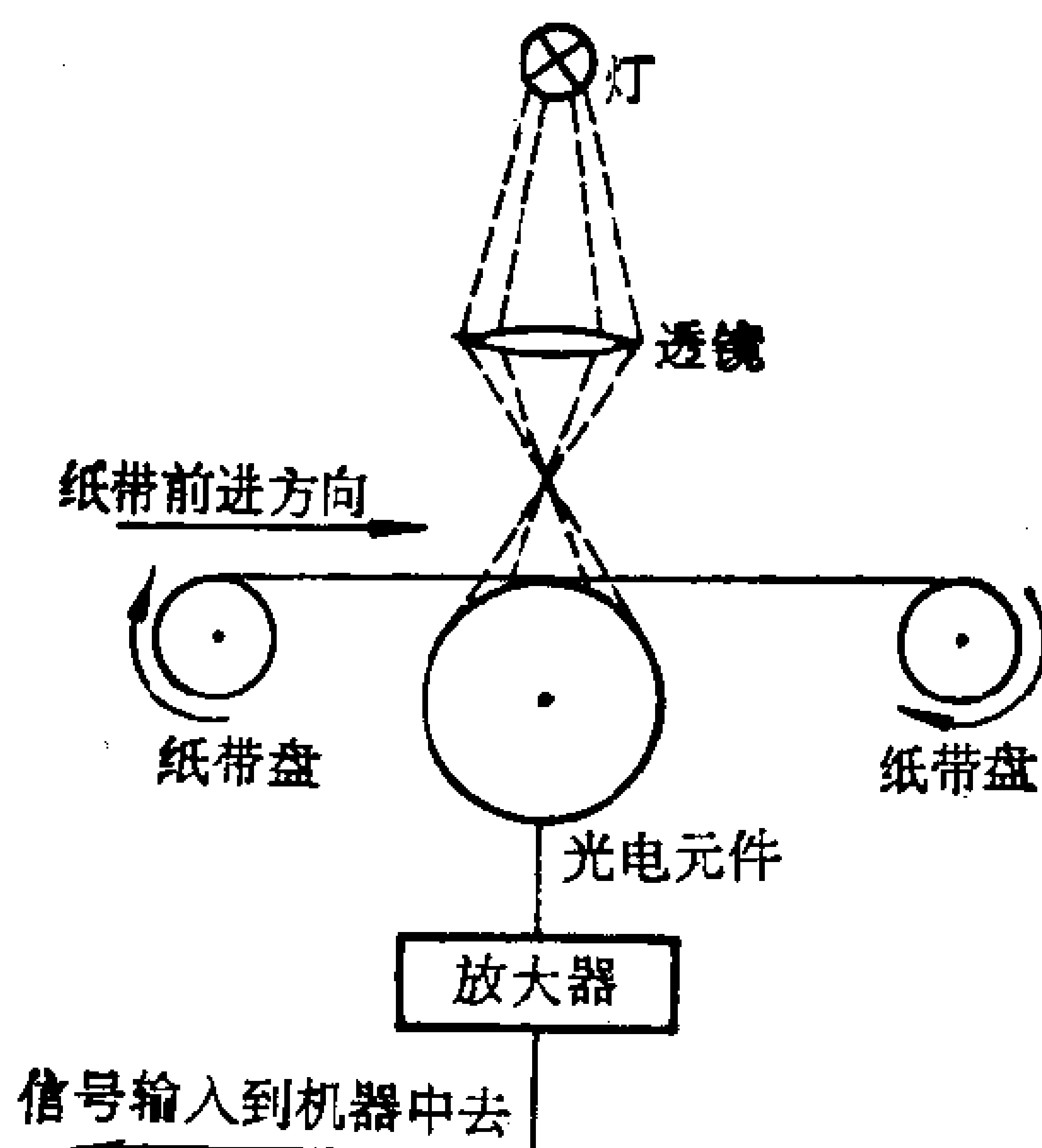
纸带中间的一列小孔叫做同步孔，在输入数码或拖动纸带时是有用的。最左面的一列孔，叫做奇偶孔，可以用来校验纸带上输入的数码有没有错误。穿孔时要使每一行都是奇数个孔。如果这一行的数不是奇数个孔，那么就要在奇偶孔这个位置上打一个孔。如果这一行的数本身有奇数个孔，那么奇偶孔位置上就不必再穿孔。那一行上弄错了，出现了偶数个孔，机器就会自动停止。同步孔、奇偶孔与数值的大小都没有关系。

每个数在纸带上所占的行数是一定的，不足的要用0补足。打孔时有一套规则，这里不作介绍了。本页所附长条图，就是纸带穿孔的实样。

问题2 将3689405在图中的纸带上画孔表示出来。

十进制数						十二进制数
3	○	○		○	○	0011
6		○				
8		○				
9		○				
4		○				
0		○				
5		○				

纸带通过光电输入机（如图），有孔的地方就通过光，没孔的地方就无光，光电元件能把透过孔射来的光线变成电的讯号，就形成有讯号和没有讯号两种状态，分别表示 0 和 1。



使用电子计算机，除了要输入运算用的数字外，还要输入命令机器操作的“指令”，例如数字储存在哪里，作什么运算等等。这种操作指令是用英文字母，数学符号和标点符号等组成的语句，人们叫它“程序”。怎样使机器“接受”程序呢？先给每个符号以一个号码，如有的机器规定：“+”为 46，“x”为 43，“;”为 67 等等（这里实际上用的是八进制编码）。然后用前面的方法在纸带上穿孔后，与数字分别输入计算机中。于是机器就能按程序对数字进行运算。运算结果由机器自动翻译成十进制数，在专用的打字机上打出来！

将一个十进制数写成十-二进制数，看上去好象是二进制数了，但实际上它并没有把十进制数真正换成二进制数，因此它并不能参加运算。十-二进制数只是用来把十进制数输入到机器中去；输入机器之后，自动翻译成二进制数，然后进行运算。所以我们把它叫做以二进制编码的十进制数。

问题解答

问题 1

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0001, & 0000, & 0010, & 0011 \end{array}$$

$$1023_{(十)}=0001000000100011_{(十-二)}$$

问题 2

十-二进制数	十进制数
0 0 1 1	3
0 1 1 0	6
1 0 0 0	8
1 0 0 1	9
0 1 0 0	4
0 0 0 0	0
0 1 0 1	5

火柴游戏

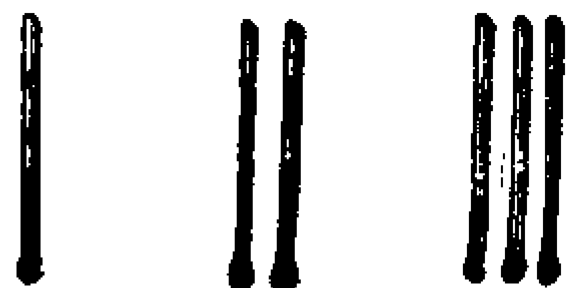
最后我们来做一个游戏。

有几堆火柴，堆数与每堆的火柴数都是任意的.现在由两人轮流取这些火柴。他们可以取任何一堆里的任意根火柴，甚至将一堆火柴全部取走。但是每次只允许在一堆里取，不允许这堆里取一些，那堆里也取一些，取到最后一根火柴的人算胜利。这种游戏据说出自我国，国外至今有人还把这游戏叫做“中国两人游戏”。

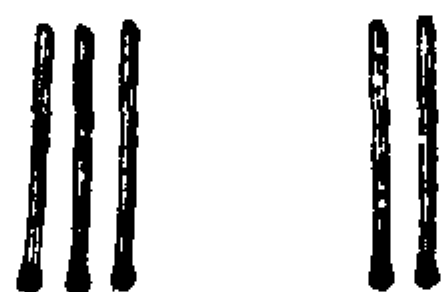
这种游戏是有窍门的。

问题1 两堆火柴，每堆两根，如果你是后取者，你能设法使自己必胜吗?

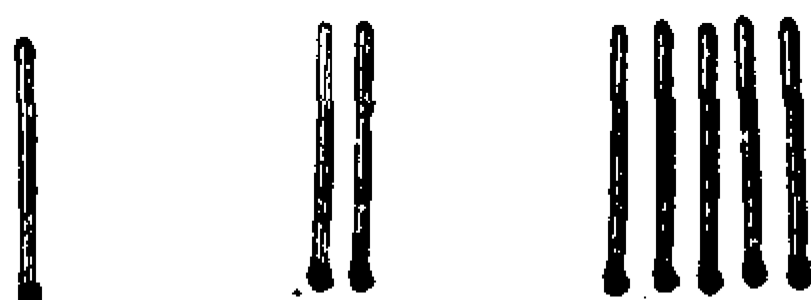
问题2 三堆火柴，分别有一根，两根，三根，如果你是后取者，你能设法使自己必胜吗?



问题 3 如图的两堆火柴，如果你是先取者，你能设法使自己必胜吗？



问题 4 如图三堆火柴，如果你是先取者，你能设法使自己必胜吗？



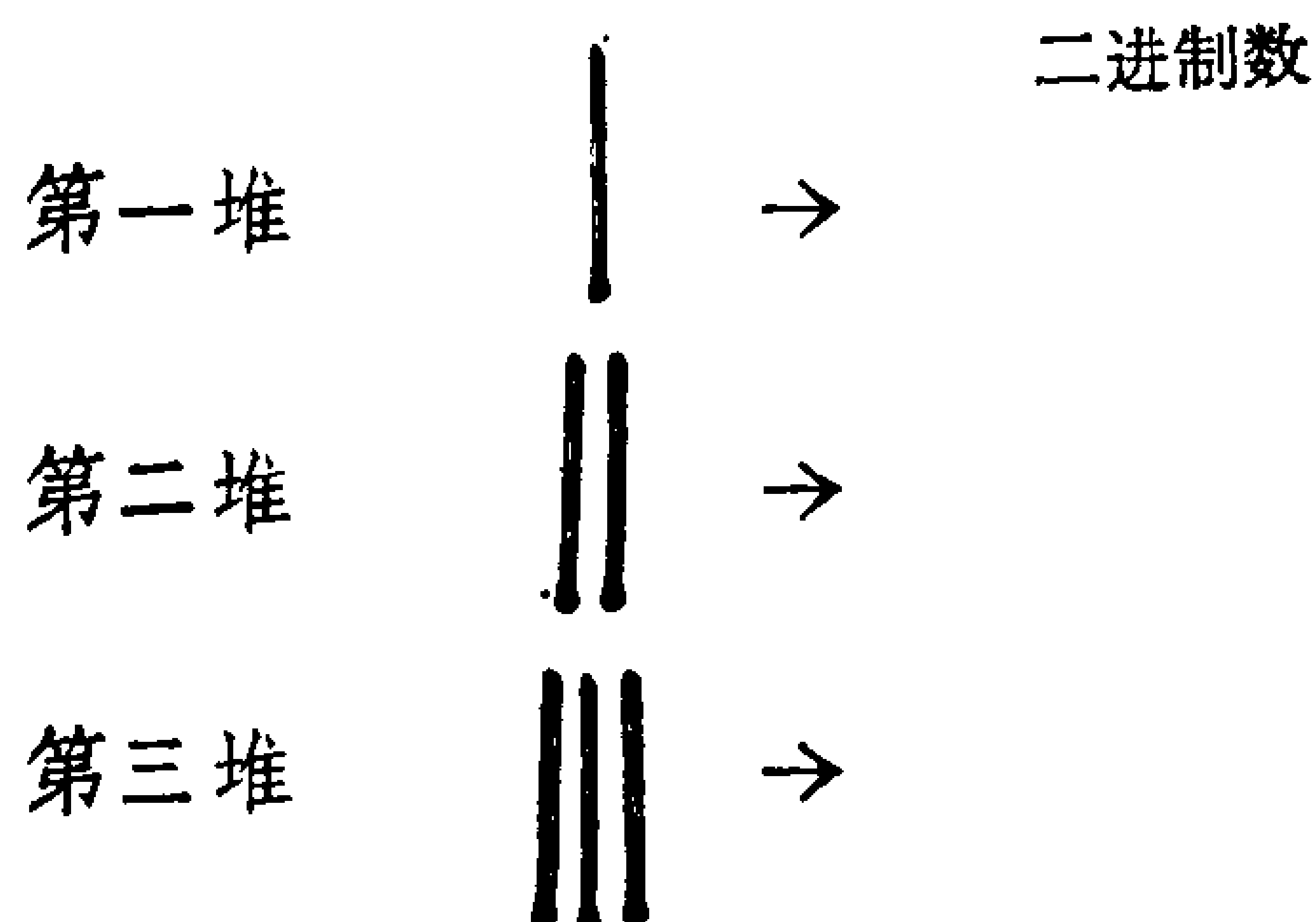
问题 1 中的形势有一个特征。

把每一堆的火柴数目用二进制数表示出来，然后把这些数的同一位上的“1”的个数加起来，如果都是偶数，我们把这种形势叫做偶式形势。譬如对问题 1 的形势：

			二进制数
第一堆	‖	→	1 0
第二堆	‖	→	1 0
			2, 0　各位上“1”的个数

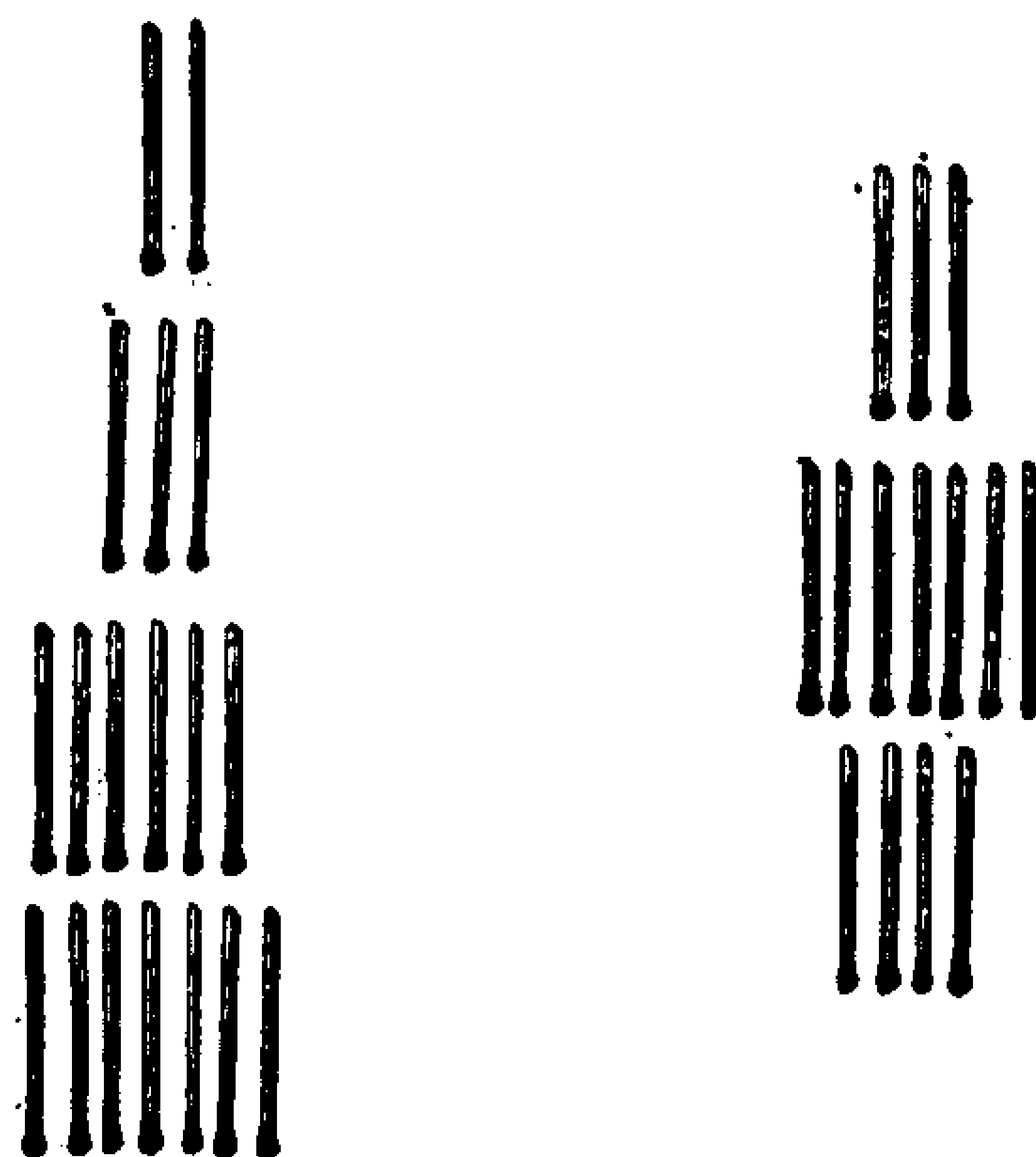
个位上 0 个“1”，第二位上 2 个“1”，“1”的个数都是偶数，这就是偶式形势。

问题 5 问题 2 里的形势是不是偶式形势？



对偶式形势，后取者能必胜。

问题 6 下面的火柴图是不是偶式形势？后取者能必胜吗？

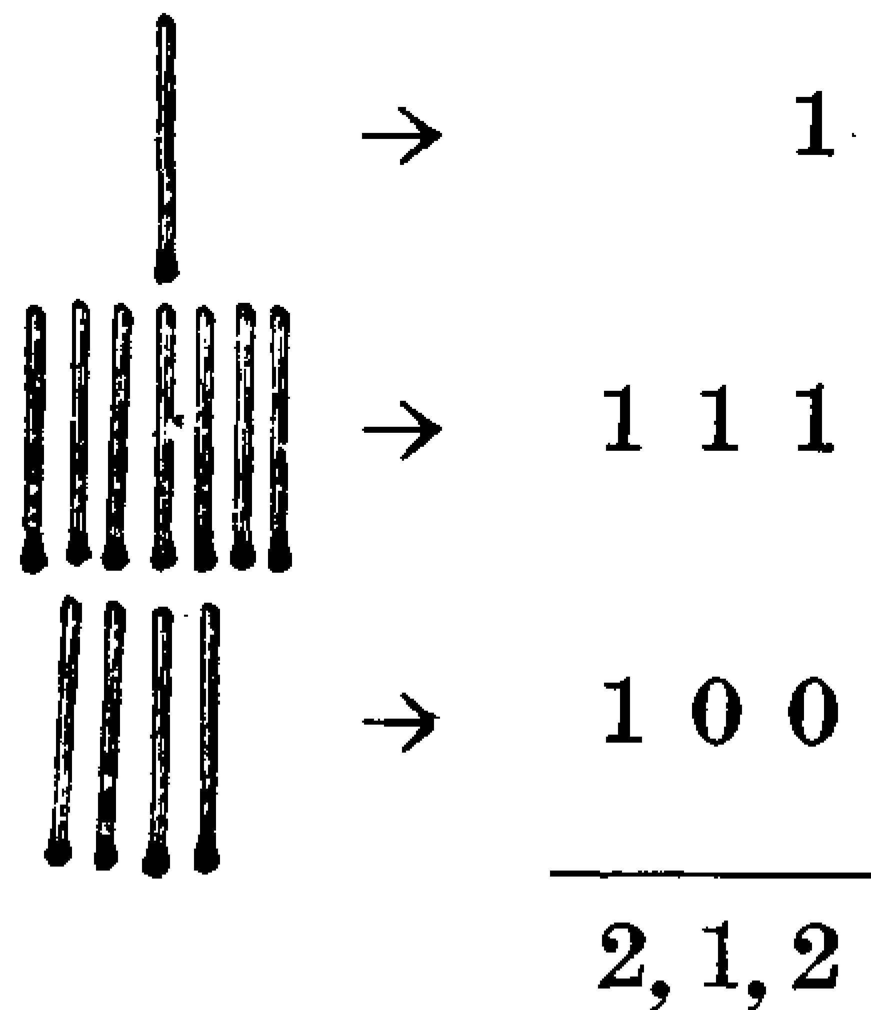


一个形势如果不是偶式的，就叫做奇式的。不难看出，问题 3，4 中的形势是奇式形势。

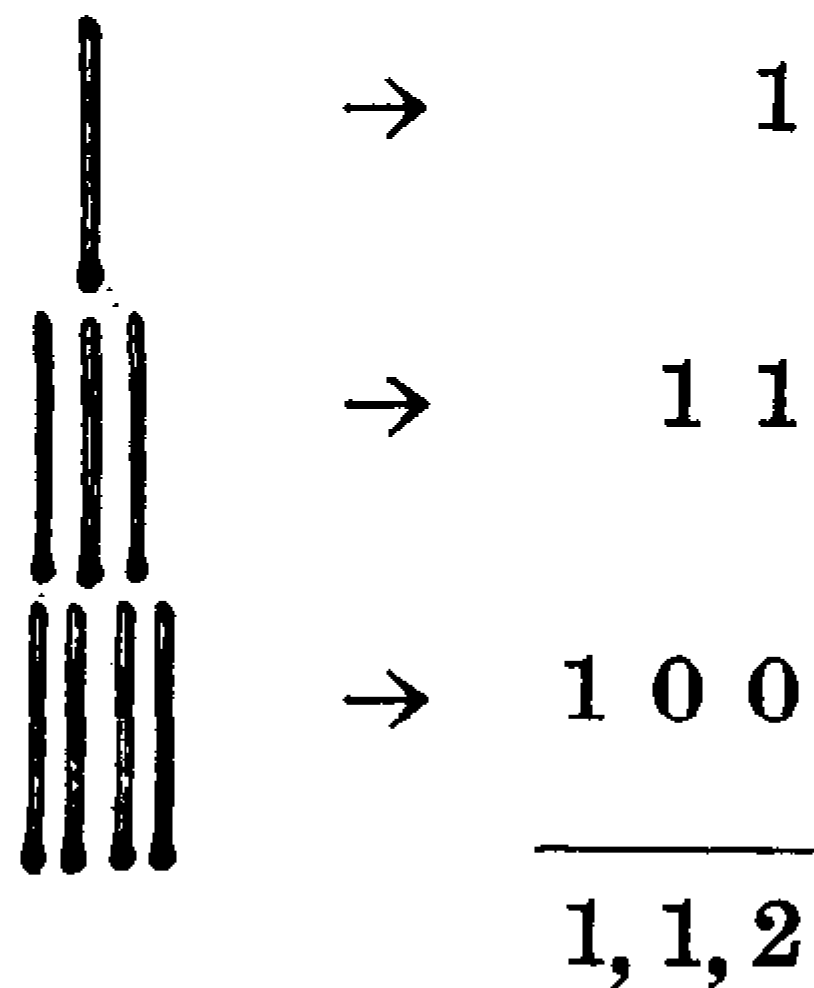
只要取得适当，奇式形势总能变为偶式形势。例如对问题 4，只要取走第三堆里的两根火柴，就将奇式形

势转变为偶式形势了.可见对奇式形势先取者可必胜.

问题 7 下图的形势是奇式形势，你能使它转化为偶式形势吗？



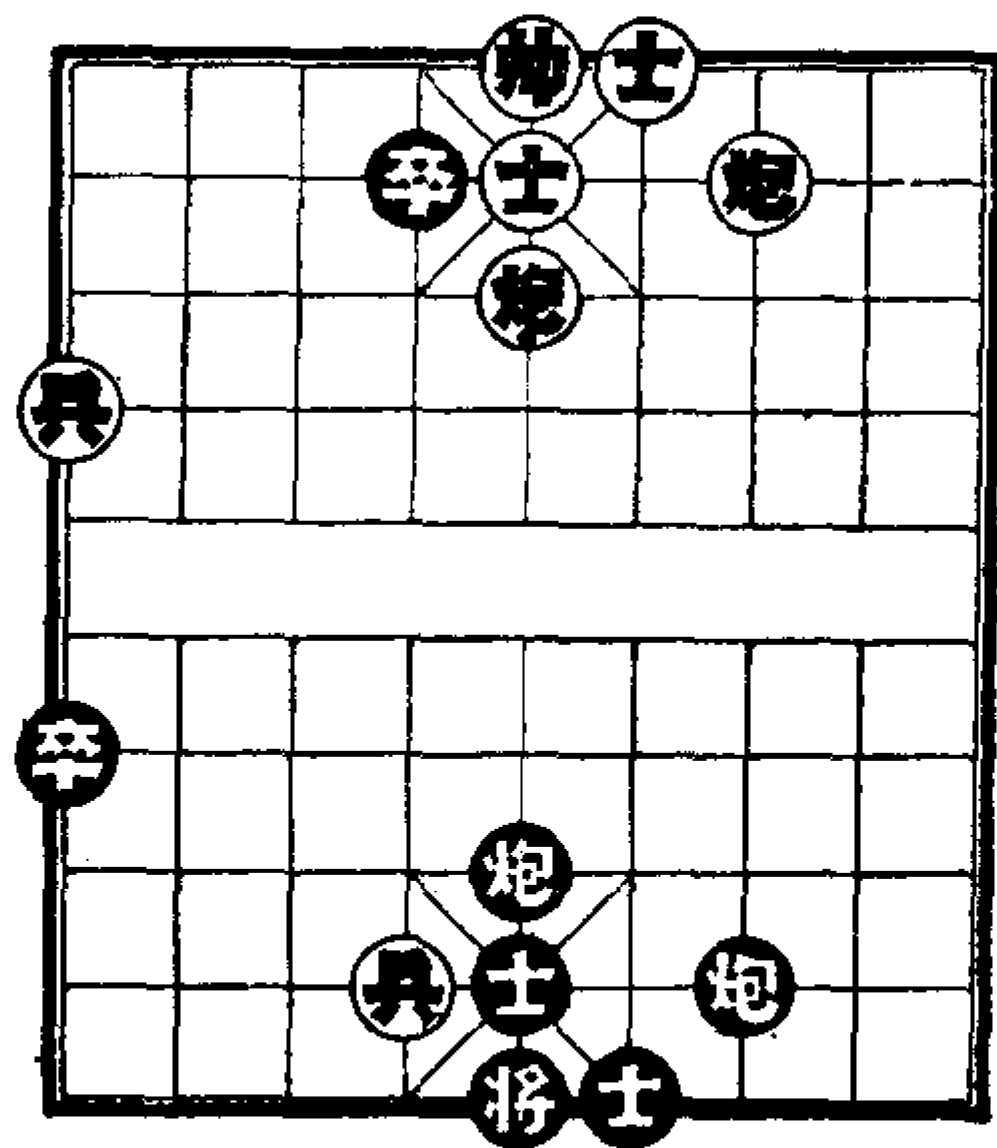
问题 8 下图的形势也是奇式形势，你能使它变为偶式形势吗？这个问题难一点，仔细想想还是能解出来的.



如果你掌握了这种火柴游戏的窍门，那么你取胜的把握是很大的. 游戏开始前你先分析一下是什么形

势：是偶式的，你可以争取当后取者；是奇式的，你可以争取作先取者，那么胜利必定是属于你的。

问题9　下面是一副象棋残局，如果你先走，该怎么走才好？（会下象棋的小读者一定会看出，这局棋与火柴游戏是异曲同工的。）



问 题 解 答

问题1　后取的人能必胜．有两种可能的情形：

第一种，先取的人取走任一堆里的两根火柴，后取的人取另一堆里的两根火柴．

第二种，先取的人取走任一堆里的一根火柴，后取的人取另一堆里的一根火柴．逼得先取的人取某一堆里剩下的一根火柴，最后一根火柴就为后取的人取走．

问题 2　后取的人能必胜．有六种可能情形：

第一种，先取的人取第一堆的一根火柴，后取的人取第三堆的一根火柴，就成问题 1 的格局．

第二种，先取的人取第二堆里的一根火柴，后取的人取第三堆的全部火柴，就成问题 1 中第二种情形的格局．

第三种，先取的人取第二堆里的两根火柴，后取的人取第三堆里的两根．以下情况自明．

第四种情形，先取的人取第三堆里的一根火柴，后取的人取第一堆的一根．以下情况自明．

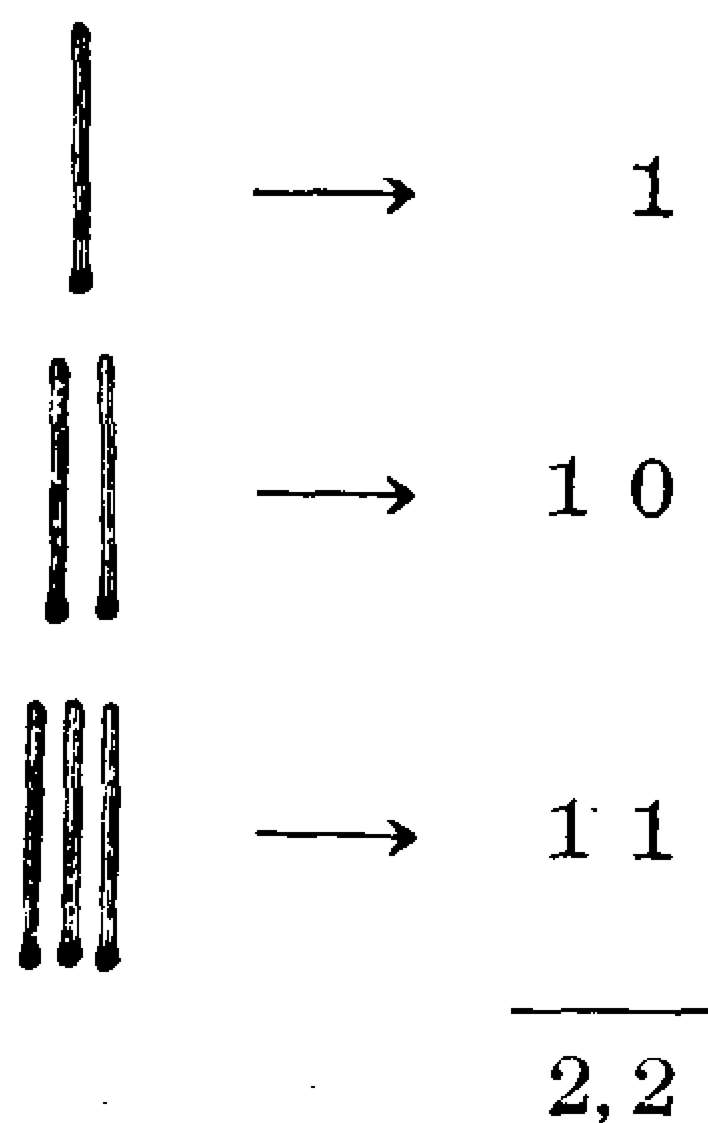
第五种情形，先取的人取第三堆里的两根火柴，后取的人取第二堆的两根．以下情况自明．

第六种情形，先取的人取第三堆里的三根火柴，后取的人取第二堆的一根．以下情况自明．

问题 3　先取者能必胜．先取者取第一堆的一根，就成问题 1 的形势．

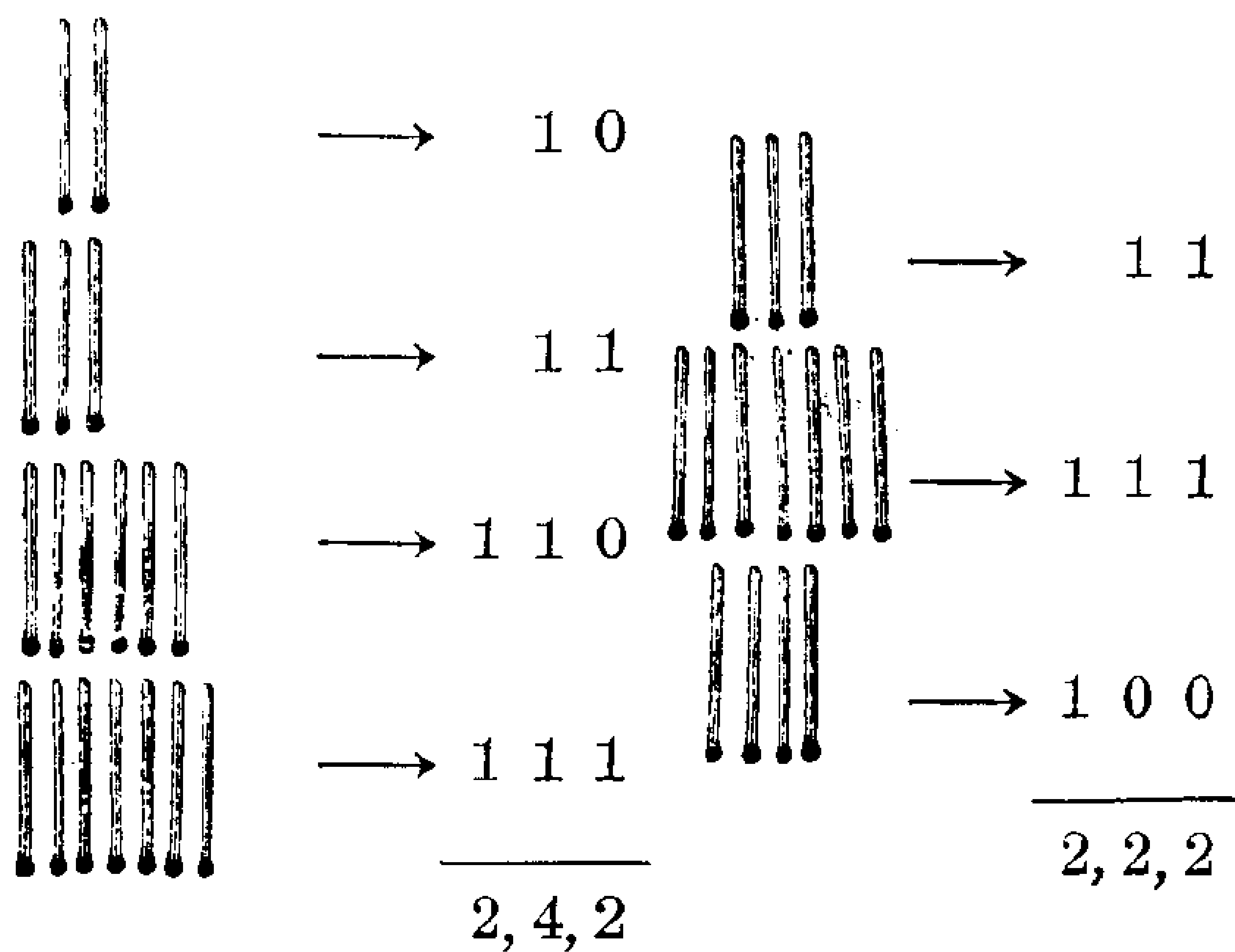
问题 4　先取者能必胜．先取者取第三堆里的两根，就成问题 2 的形势．

问题 5



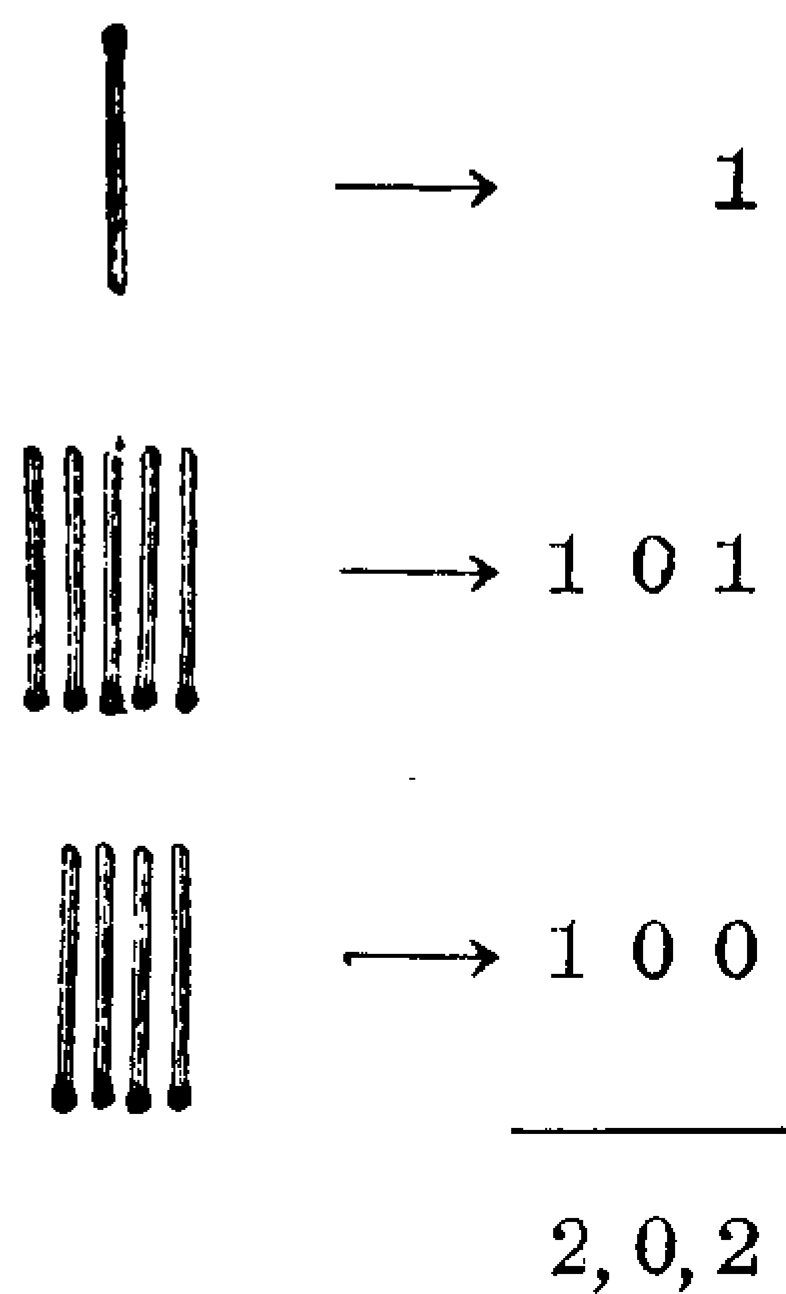
是偶式形势.

问题 6

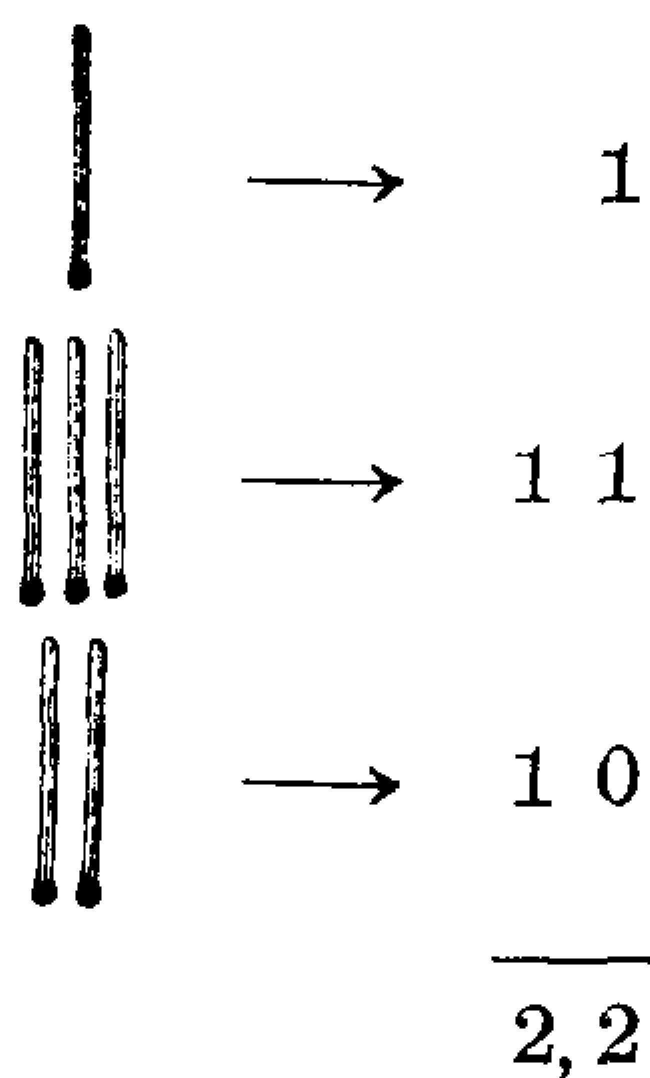


都是偶式形势，后取者能必胜.

问题 7 取走第二堆的两根，成下列形势：



问题 8 取走第三堆的两根，成下列形势：



问题 9 这副棋除了炮和边兵可以沿纵向走动外，其余的棋子都无法走动一步．中路两炮间空了 4 格，边上两炮间空了 6 格，两边兵中间空了 2 格，但实际上只能走 1 格．用类似火柴游戏分析一下可知

6 格 ⟶ 1 1 0
4 格 ⟶ 1 0 0
1 格 ⟶ 　　1
―――――
2, 1, 1,

这是一个奇式形势，先走者只要设法走成偶式形势就可以了．本局棋又名“双炮禁双炮”，原载于《竹香斋象戏谱》一书中．

[General Information]
书名=1+1=10：漫谈二进制数
作者=陈永明著
页数=98
SS号=10068614
出版日期=